

時間と空間の原理

新八元数と相対性理論

後藤 博茂

$$h^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

KIYOTAKI

Principles of Time and Space

New Octonions and Relativity

Hiroshige Goto

$$h^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i$$

$$ki = -ik = j$$

$$hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

KIYOTAKI

はじめに

トンデモ本について

物理学の世界には「トンデモ本」という言葉がある。「トンデモない間違いが書かれた本」の略である。私の専門は分子生物学と医学であるが、分子生物学の世界では聞いたことがない。また、書店の数学書のコーナーでもその言葉に該当する本を見たことがないので、物理学の特殊な言葉と考えられる。分子生物学では本の内容の真偽は実験ですぐに確かめられるので間違いが存続できない。また、数学でも同様に計算ですぐに確かめられるので「トンデモ本」がないのだろう。物理学の中でも特に相対性理論では、新しい理論の真偽を実験で確かめるのが困難であるため、無責任な本が沢山書かれるのではないだろうか。

松田卓也先生と中間瀬敏史先生の「なっとくする相対性理論」に、「トンデモ本」の特徴として以下の項目が示されている。(1) 相対性理論に関する本が多い。(2) 物理学の素人が書いている。(3) 自説は絶対に正しいと言い張り、人の批判に耳を傾けようとしない。(4) すべてを説明したがる。(5) 学会雑誌に投稿せず、商業出版や自費出版で発表する。

ひるがえって、この本について考えると、医師である私が、相対性理論を材料にして新しい数学を説明している。さらに、その数学で四次元時空の新しい構造や質量を説明し、自費出版している。すなわち、この本は先に書いた「トンデモ本」の特徴の大部分を持っている。このままでは、この本は「トンデモ本」に分類されて学生や研究者に読んでももらえないため、そうではないことを先に弁明する。

「トンデモ本」の特徴 (1) 相対性理論に関する本が多いことについて弁明する。

この本の研究の目的は、物理法則を四元数、八元数で記述することであった。曲がないユークリッド時空の複素数や四元数、八元数を、曲がった非ユークリッド時空の新複素数や新四元数、新八元数に作り変えるために相対性理論を必要とした。さらに新複素数と新四元数、新八元数が正しいことを証明するために、これらの数学を使って相対性理論の結論を導いた。つまり、この本の目的は新しい数学を物理学に応用することであって、相対性理論の批評が目的ではない。

「トンデモ本」の特徴 (2) 物理学の素人が書いていることについて弁明する。

「物理学の素人」を物理学を職業にしていない人と定義すると、分子生物学と医学が専門の私は物理学の素人になる。しかし、「物理学の素人」が物理学の勉強や研究を最近始めた人と定義するなら、私は物理学の素人ではない。

この研究は、私が 12 歳のときに遠心力を一方向に集める理論を考え、実証装置を作ったときに始まる。中学時代に回転部分を作ったが動力につなぐことができなかった。高校時代は受験勉強のために製作を中断した。その後、大学の物理学科で理論を検証するために東京大学理科 II 類に入学した。東京大学には、教養部のときの一般教

養科目の成績で専門コースが決まる「進学振り分け制度」がある。入学すればすぐに数学と物理学が勉強できるという希望を抱いていた私は、絶望して下宿で寝て暮らした。その結果、農学部か教育学部、文学部にしか行けないことになった。退学して他の大学の物理学科を受験することを教授に勧められたが、親の顔が頭に浮かび、農学部に進学して物理学科の大学院を受験することにした。卒業前に東京大学、京都大学、九州大学の物理学科大学院を受験したが、すべて落ちた。

夢破れて会社員になったが、学問への思いを断つことができず、九州大学医学部に入学した。医学部の学生時代に、複素数を拡張した四元数で物理法則を記述しなければ正しい結論に達しないだろうと考え、複素関数論、リーマン幾何学、四元数を勉強したが物理学への応用の糸口はつかめなかった。大学院で分子生物学の研究をしているときも、ハーバード大学医学部博士研究員のときも物理学の勉強を続け、最終的に、複素数と四元数、八元数を相対性理論に合うように作り変え、新複素数、新四元数、新八元数を作った。

以上のように、一貫して物理学の勉強と研究を続けており、私は物理学の素人ではない。

「トンデモ本」の特徴 (3) 自説は絶対に正しいと言いなり、人の批判に耳を傾けようとしないことについて弁明する。

分子生物学の大学院での私の研究テーマは、細胞周期をコントロールする新しい遺伝子の発見であった。4年間、朝9時から夜12時まで実験を続けて得た結論は、「HCF 遺伝子の変異は細胞周期を静止期にする」であった。たった一行の結論を得るために4年間の汗と涙が必要であった。

この研究生活で学んだ大切なことは、「自分を批判するもう一人の自分を持っていないければ正しい結論に達しない」ということである。思い込みで実験をしたために失敗して、長期間の努力が水の泡になるという経験をした。自分を批判するもう一人の自分を持ち続けることが、成功するために必要である。後でも述べるが、真偽を確かめるために、この本の研究結果は英文の日本物理学会誌に投稿予定であった。しかし、医師としての仕事のために英文にする時間がなく、やむなく自費出版した。本来は、物理学会誌で発表して批評してもらおうと考えていたのである。つまり、この本の出版の目的は間違いを指摘してもらうことであり、自説は絶対に正しいと主張しているのではない。

ここで「トンデモ本」の私の定義を説明する。分子生物学の研究でわかったことは、一流の研究者は自分の中に自分を批判する別の自分を持っているということである。二流の研究者は自分の中に自分一人しかいない。つまり、「トンデモ本」の定義は「自分の中に自分を批判する別の自分を持っていない人が書いた本」である。この定義が正しいとすれば、この本は「トンデモ本」ではない。

「トンデモ本」の特徴 (4) すべてを説明したがることについて弁明する。

私の専門である分子生物学や医学の論文には最後に「考察」がある。そこに、研究

結果から予測されるすべてのことを書かなければならない。その論文を読んだ他の研究者が次の研究を考えるための材料を提供することが、その目的である。この考察が少ない場合は内容のない論文とみなされるので、少しでも多く書くことが勧められる。分子生物学の論文の「考察」と「トンデモ本」の著者がすべてを説明したがることの違いは、前者では論理的に推論したことしか書いてはいけませんが、後者の説明は論理性がなく空想ですべてを説明していることではないだろうか。この本でも、新複素数、新四元数、新八元数で説明できる多くのことを書いたが、すべての結論は数学的に証明され空想ではない。

「トンデモ本」の特徴 (5) 学会雑誌に投稿せず、商業出版や自費出版で発表することについて弁明する。

先にも述べたが、他人の批判を受け理論を正しいものにするために、この本の研究結果は日本物理学会の英文誌に投稿予定であった。しかし、どこにも存在しない新しい数学を作り、それを物理学に適用したために、得られた結論の証明の各段階で新数学を詳しく説明する必要がある。その結果、通常の論文の3本分以上の量になってしまった。分割しても、前提となる論文がないので各論文で新数学を最初から説明する必要がある。また、英文に翻訳するには1年以上かかり、査読者とのやり取りまで考えると2年以上かかって人の目に触れることになる。その間、一人で研究を続けると、間違った道に入り時間を無駄にしてしまう可能性が高い。あるいは、既に間違っているかもしれない。そこで、自費出版して早めに人の批判を受けることが最善の選択だと考えたのである。

この本の要約

次に、この本の内容を要約する。専門用語は本文中で説明するので、要約では専門用語を説明なしで使った。また、一般の読者のために、「特殊相対性理論」のかわりに「相対性理論」という言葉を使った。

この研究の最初の目的は、複素数を4次元に拡張したハミルトンの四元数で物理法則を記述することであった。加減乗除の代数学的計算が可能な数の体系は実数、複素数、四元数、八元数しかないという代数学の定理から、4次元時空の物理法則は四元数で記述されなければ正確な結論を得ることができないと考えたのである。

最初に、 A を複素数、 $\bar{A}$ を共役複素数とすると、複素数の割算 $\bar{A}/|A|$ は座標変換になることをみつけた。(第2章)

そこで、これを2次元時空に適用すれば相対性理論のローレンツ変換を求められるのではないかと考えた。計算の結果は、ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

で光速 c の 2 乗の符号を負から正にした式になった。複素数は曲がりがないユークリッド空間の数学であるが、時空は曲がっていることが c^2 の符号が逆になった原因であると考え、曲がった非ユークリッド時空の複素数を作ることにした。そのために、ハミルトンの四元数の三つの虚数 i, j, k に加えて第 4 の虚数 h を仮定した。演算規則は

$$i^2 = j^2 = k^2 = h^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

$$hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

である。そして複素数 $a + bi$ から新複素数 $ah + bi$ を作り、この新複素数を使って再び座標変換 $\bar{A}/|A|$ をおこなうとローレンツ変換と同じ式を求めることができた。このことは、新複素数が非ユークリッド時空の数学であることを示している。(第 3 章)

また、座標変換 $\bar{A}/|A|$ を使ってローレンツ変換を求める計算で時間 t を負と仮定すると矛盾が生じることから、時間は正の方向にしか進まないことが証明された。(第 3 章)

新複素数が正しい数学であるかどうかを検証するために、2 次元時空における相対性理論の固有時、時間の遅れ (第 6 章)、世界距離、距離の短縮 (第 7 章)、双子のパラドックス (第 9 章) などを、新複素数と新複素平面を使って証明した。光の放出や時計と物差しのたとえは使わずに、新複素数と世界線の方程式だけを使って計算したが、相対性理論と同じ結果が得られた。

次に、第 4 の虚数 h を使って、ハミルトンの四元数 $a + bi + cj + dk$ から非ユークリッド時空の新四元数 $ah + bi + cj + dk$ を作った。さらに、新四元数を使って座標変換 $\bar{A}/|A|$ をおこない、4 次元時空におけるローレンツ変換を求めた。これを新ローレンツ変換と名づけた。静止した観測者 A の x 軸方向に観測者 B が等速度 v で運動するとき、相対性理論では y 軸成分と z 軸成分は変化せず $y' = y, z' = z$ になる。しかし、時空の等方性などの仮定をせずに数学だけで計算すると、 y' と z' はそれぞれ y, z, v の 3 変数関数であり、 x 軸方向の運動が y 軸と z 軸方向の距離を変えろという結論が得られた。式は

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である。相対性理論では空間の等方性を仮定したり、 $y' = f(v)y, z' = g(v)z$ と仮定して計算したために、この結果に至らなかったと考えられる。(第 10 章)

ローレンツ変換に代わる新ローレンツ変換の正しさは、この変換を使って計算した世界距離が不変であることや、速度の変換式を使って光速不変の原理が導かれることで証明した。また、座標変換 $\bar{A}/|A|$ は斜交座標軸を作ることも証明した。さらに、一般

の世界距離の定義, $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ と異なり, 新四元数を使って数学的に求めた世界距離の定義は $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ であることを証明した. (第 10 章)

これらの計算の過程で, 新四元数は実数 a と虚数 h, i, j, k , そして二つの虚数の掛け算 hi, hj, hk の 8 種類の数を含み, hi, hj, hk は他の数とは独立した新しい実数であることを証明した. つまり, 新四元数は八元数であり 4 種類の実数と 4 種類の虚数から構成されることがわかった. しかし, すでに知られているユークリッド空間のグレイブズの八元数 (ケイリー数) とは異なり, 非ユークリッド時空の数学であるので新八元数と名づけた. (第 11 章)

次に, 新八元数を使って時空の構造を調べた. その結果, 4 次元時空は 2 重構造をもつことが明らかになった. 世界点が $cth + xi + yj + zk$ で表される世界に我々は住み, もう一つの世界の世界点を表す数は $ct + xhi + yhj + zhk$ である. 正確な言い方では, 我々の世界は虚数の世界であり, もう一つの世界が実数の世界であるが, 新八元数時空理論が認められるまでは我々の世界を正の世界とよび, もう一つの世界を負の世界とよぶことにした. 正負の二つの世界は平行に存在するのではなく重なって存在する. つまり, 時空の四つの座標軸は, それぞれが正の世界の座標成分と負の世界の座標成分を持ち, 時間軸成分は ct_0h と ct_1 , x 軸成分は x_0i と x_1hi , y 軸成分は y_0j と y_1hj , z 軸成分は z_0k と z_1hk である. 4 次元時空が一つしかないと考え場合は 4 次元時空の各座標成分は複素数になり, 時間軸成分は $ct_0h + ct_1$, x 軸成分は $(x_0 + x_1h)i$, y 軸成分は $(y_0 + y_1h)j$, z 軸成分は $(z_0 + z_1h)k$ である. (第 11 章)

また, 負の世界の世界点を表す数 $ct + xhi + yhj + zhk$ を使って, 負の世界の相対性理論を求めた. その結果は, 負の世界の物理法則は正の世界の物理法則と式が同じであることを示している. (第 11 章)

次に, 新八元数が正しいかどうかを調べるために新八元数の公理を選び定理を求めた. 今後, 新八元数から矛盾が生じたときは公理と定理の正誤を調べればよいようにした. また, グレイブズの八元数では計算の結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立たないことが知られているが, 新八元数では結合法則が成り立つことが証明された. このことから, 八元数は不完全な数であり新八元数が完全な数であると考えられる. 最近の素粒子の研究で八元数が使われているが, 新八元数を使わなければ正しい結論を得ることができない可能性がある. (第 13 章)

4 次元時空の 2 重構造を認めると, ベクトルは新八元数で書き換えることができる. 二つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ があり, それぞれのベクトルを表す新八元数を A, B とすると, 新八元数とベクトルの内積, 外積の関係式は

$$\begin{aligned}\overline{BA} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\overline{BA} + \overline{AB})/2 \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (\overline{BA} - \overline{AB})/2\end{aligned}$$

である. さらに, ベクトルの 3 重積と 4 重積も新八元数で書き換えることができた.

(第 14 章) また、テンソルを使った計算は新八元数で行うことができるので計量テンソルやクロネッカーの δ (デルタ) を必要としないことを示した。そして、テンソルの欠点と新八元数による解決法も説明した。(第 15 章)

次に、シンクロトン放射を新八元数で説明した。ローレンツ変換による計算では、光速で運動する電子から進行方向に対して横方向に放出された光は前方に集中するが、新ローレンツ変換で計算すると前方と横方向の 2 方向の光として観測される。現時点では、この結果の解釈は不明である。(第 16 章)

また、新ローレンツ変換から求められた速度の変換式を使って運動量保存の法則と速度による質量の変化を証明した。これらの結果は相対性理論の結論と一致しているので、新八元数を使って求められた新ローレンツ変換の正しさを示していると考えられる。(第 17 章)

さらに、質量とエネルギーは単位世界線の時間成分であり、運動量は空間成分であると考え、特殊相対性理論の結果を矛盾なく説明できることを示した。一般相対性理論のように質量が時空を曲げるのではなく、物質の世界線の時間成分そのものが質量である。また、質量が単位世界線の時間成分であると考え、正の世界の質量とエネルギーが虚数になることを証明した。そのときに、負の世界の質量とエネルギーは実数になり、正と負の世界の質量とエネルギーの 2 乗の和が 0 になる。一般に考えられているように物質と反物質の質量とエネルギーをそのまま足して 0 になるのではない。さらに、光の世界距離は常に 0 であるが世界線の時間成分は存在するので、光は静止質量を持たないが運動質量を持つことを示した。(第 18 章)

この本の本来の目的ではないが、超光速時の相対性理論を新八元数を使った座標変換で計算した。その結果、超光速時には物質は負の世界に入り正の世界からは観測できないことと、固有時間の式から時間は逆転しないことを証明した。つまり、超光速運動でも過去に戻ることはできないことを証明した。また、時空は連続ではなく、とびとびの値をとる離散量であることを示した。(第 19 章)

次に、今後の課題として、新八元数による時空理論が解決すべき問題を示した。マクスウェルの電磁波の方程式はローレンツ変換をみたすが、新ローレンツ変換を当てはめるとどう変わるだろうか。新ローレンツ変換の y' と z' 軸成分のように負の世界の成分が現れるだろうか。また、光と物質の世界線の違いは 4 次元時空の通過場所の違いだけであると考え、物質の世界線も波の性質を持つ。その場合、物質波のマクスウェル方程式はどうなるだろうか。その式が統一場理論になる可能性はないだろうか。(第 20 章)

さらに、一般相対性理論では加速度系では光速は一定ではないが、新八元数で計算しても同じ結論になるだろうか。加速度がある場合のローレンツ変換は存在しないが、新八元数を使った座標変換から新ローレンツ変換に相当する式を求めることができる可能性がある。この問題では途中の計算結果を示した。(第 20 章)

また、力は存在せず、世界線の衝突と反射による世界線の曲がりかたが力であると考え

ると、エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は世界線の反射の法則であることを証明した。その理論では、自由落下している物質の世界線に衝突し続けて重力とよばれる世界線の曲りを作る別の粒子が存在しなければならない。(第 20 章)

最後に、新八元数と最新の「ひも理論」が同じ内容を持つ可能性を示した。新八元数時空理論では、全ての素粒子は 4 次元時空の位置を表す変数 (ct, x, y, z) と世界線の振幅を表す変数 Ψ (プサイ) の合計五つの変数を持つ。そして、 Ψ は世界線の太さなので、その大きさは素粒子よりも小さい。ひも理論の前段階のカルツァークライン理論では 5 次元時空を考え、第 5 の次元は観測できないほど小さな丸まった輪の形をしている。この第 5 の次元は世界線の振幅 Ψ と同じものではないだろうか。すべての物質が五つの変数 (ct, x, y, z, Ψ) を持つので 5 次元時空が考えられやすいが、 Ψ は振幅なので 4 次元時空しか存在しない。(第 20 章)

また、新八元数時空理論では 4 次元時空は正と負の世界が重なった 2 重構造を持つので、正の世界の物質が持つ五つの変数 (ct, x, y, z, Ψ) と負の世界の物質が持つ五つの変数 (ct', x', y', z', Ψ') を合わせて 10 種類の変数が存在する。カルツァークライン理論を発展させたひも理論は 10 次元時空でしか成り立たないことから、新八元数時空理論で物質が持つ 10 種類の変数を 10 次元時空と考えている可能性がある。実際には、2 重構造を持つ 4 次元時空しか存在しない。また、ひも理論ではすべての物質は振動するひもで表されるが、新八元数時空理論では物質の世界線は光と同じように振動し、時空の不連続性から世界線の最小単位は素粒子よりも小さい。このように新八元数時空理論とひも理論が同じ内容を持っている可能性があるので、ひも理論を新八元数で書き換えることができるかどうかが問題である。(第 20 章)

今後、以上の問題を解決しなければならない。しかし、新八元数を電磁気学や一般相対性理論、ひも理論に適用する前に、一旦立ち止まり、この本の内容が正しいかどうかを検証する必要がある。

新数学について

昔、医学用語に「濾過細菌」という言葉があった。光学顕微鏡しかなかった時代に、光学顕微鏡では見ることができないが濾過膜で分離して動物に投与すると病気を起こす病原体が存在するので濾過細菌と名づけたのである。つまり、濾過細菌は存在するが見ることができない病原体であった。その正体は、細菌よりはるかに小さいウイルスであった。そして、電子顕微鏡の発明後に初めて見るできるようになった。

日本の最も優れた医学者の一人である野口英世博士は数々の細菌を見つけたのであるが、黄熱病の病原体は見つけることができず、ついに黄熱病で命を落した。今では、黄熱病の病原体はウイルスであり光学顕微鏡では見ることができないことがわかっている。「黄熱病の病原体は光学顕微鏡では見ることができないのではないか」と野口博士が疑問を抱いていたら、先生はその後も医学の発展に貢献しただろう。

物理学の研究でも同じことがいえる。説明できない物理現象に出会ったときに、既存の数学で無理に説明するよりも、その物理現象に合わせて数学を作り直したほうがよい。光学顕微鏡で時間を費やすよりも電子顕微鏡を作って新しい発見をしたほうがよいことと同じである。この本で説明する新八元数は、光や時計、物差しのたとえを使わずに相対性理論を正確に計算できる数学である。また、4次元時空は2重構造を持ち、4種類の実数と4種類の虚数が存在することも新八元数を使った計算で求められる。この新八元数を使えば、既存の数学や物理学では説明が困難な現象を説明できる可能性がある。

新八元数は簡単な数学なので、物理学や数学を専門にしている人はこの本を1日で読んでしまうだろうし、大学生なら3日で読んでしまうだろう。また、高校生にも理解できる数学なので高校生もこの本を読んで欲しい。真理の探究を志し、物理学や数学の分野で研究している若い人達がこの本の存在に気づき、彼等の研究に役立てることを期待している。そして、彼等にとって、この本が宝の山であることを確信している。

2011年5月

後藤 博茂

謝 辞

東京大学入学のきっかけを作ってくれた池田修身氏, 東京大学在学中に全面的に支援してくれた吉田健三氏, 九州大学医学部の学生時代に医師の心構えを教えて頂いた黒木建先生に感謝申し上げます.

また, LaTeX 変換ソフト InftyEditor の使い方を教えて頂いた福岡教育大学の藤本光史教授にお礼申し上げます.

目 次

はじめに	1
トンデモ本について	1
この本の要約	3
新数学について	7
謝 辞	9
1. 複素数の基礎知識	15
1.1 複素数と物理学	15
1.2 複素数の定義と公式	15
1.3 複素数と回転	18
2. 複素数による座標変換	21
2.1 座標変換とは	21
2.2 複素数による座標変換の一般式	22
2.3 座標変換における物理量の不変性	24
2.4 座標変換の逆変換	24
3. 複素数とローレンツ変換	27
3.1 標準的ローレンツ変換の導出法	27
3.2 複素数による座標変換の前提条件	28
3.3 複素数によるローレンツ変換の導出	29
3.4 第4の虚数 h	31
3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出	32
3.6 時間が正の方向にしか進まない理由	34
4. 新複素平面と斜交座標軸	37
4.1 座標軸回転を表す新複素数	37
4.2 斜交座標軸の証明	38
4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法	39
5. 新複素平面上の距離とローレンツ変換	41
5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法	41
5.2 新複素数を使った直線の方程式	48
5.3 新複素数を使った座標成分の表し方	49
5.4 虚数 h の正当性	50
6. 時間の遅れと距離の短縮	51

6.1	固有時と時間の遅れ	51
6.2	相対性理論と距離の短縮	53
6.3	世界線の交点の座標と距離の短縮	55
7.	新四元数と世界距離	59
7.1	相対性理論の世界距離の定義	59
7.2	新四元数による世界距離の導出	60
7.3	世界距離の2乗が負であることの解釈	62
7.4	最小2乗の法則	63
8.	新四元数と光の世界距離	65
8.1	相対性理論による光の世界距離の証明	65
8.2	新四元数による光の世界距離の証明	65
8.3	光の世界距離が0であることの解釈と光速不変の原理	67
9.	双子のパラドックス	69
9.1	双子のパラドックスの内容	69
9.2	静止系の視点での計算	70
9.3	運動系の視点での計算	71
9.4	世界線の曲がりと力	76
10.	新ローレンツ変換	79
10.1	新四元数による新ローレンツ変換の導出	79
10.2	新ローレンツ変換とローレンツ変換の違い	82
10.3	新ローレンツ変換と世界距離	83
10.4	ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理	84
10.5	新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理	87
10.6	虚数 h の独立性	89
10.7	新ローレンツ変換と逆変換	91
10.8	新ローレンツ変換の一般式	92
11.	4次元時空の2重構造	97
11.1	代数学の定理	97
11.2	八元数	97
11.3	新八元数	98
11.4	2重構造を持つ4次元時空	100
11.5	負の世界の新八元数と新ローレンツ変換	101
11.6	負の世界の世界距離	105
11.7	2重構造を持つ4次元時空の世界点	105
11.8	4次元時空の4種類の実数と4種類の虚数	108

12. 4次元時空の斜交座標	111
12.1 x 軸方向の運動時の斜交座標	111
12.2 任意の方向の運動時の斜交座標	116
12.3 新ローレンツ変換の y' と z' 成分の意味	118
13. 新八元数の公理と定理	123
13.1 公理と定理の必要性	123
13.2 新八元数の公理	124
13.3 新八元数の定理	127
14. 新八元数とベクトル	155
14.1 ベクトルの基本事項	155
14.2 ベクトルと座標変換	158
14.3 ベクトルの外積の向きと新八元数	162
14.4 新八元数による 3 重積の計算	163
14.5 新八元数による 4 重積の計算	166
14.6 新八元数と 4 次元ベクトル	166
14.7 回転を表すベクトルと新八元数	169
15. 新八元数とテンソル	175
15.1 テンソルが作られた理由	175
15.2 テンソルの限界と新八元数による解決	179
15.3 クロネッカーの δ	190
15.4 メトリックテンソル	191
16. シンクロトロン放射	195
16.1 シンクロトロン放射とは	195
16.2 ローレンツ変換による証明	196
16.3 新ローレンツ変換による証明	197
16.4 シンクロトロン放射光と光速不変の原理	199
16.5 シンクロトロン放射光の傾き	200
16.6 シンクロトロン放射の垂直光の観測	203
16.7 光と慣性の法則	204
16.8 ボールの投げ上げ	206
17. 新八元数による力学	209
17.1 座標変換で不変な物理量の形	209
17.2 速度と運動量の座標変換と質量	211
17.3 一般の速度と運動量の座標変換と質量	215
17.4 4 元速度と 4 元運動量	218

17.5	4 元速度の欠点	222
17.6	運動量保存の法則	226
17.7	加速度と 4 元加速度	233
17.8	力と 4 元力	238
18.	新八元数と質量	241
18.1	質量は単位世界線の時間成分である	241
18.2	エネルギーと運動量	245
18.3	4 次元時空の質量とエネルギーの総和	247
18.4	$E = mc^2$ の c の意味	248
18.5	光の質量とヒッグス粒子	249
18.6	エネルギー保存則の座標変換不変性	253
18.7	世界線の消滅	258
18.8	エネルギー運動量関係式	261
18.9	$E = mc^2$ を簡単に導く方法	262
19.	超光速時の相対性理論	265
19.1	超光速時の新ローレンツ変換	265
19.2	超光速時の固有時間	267
19.3	ゼノンの背理と不連続公理	268
20.	今後の課題	271
20.1	電磁気学	271
20.2	一般相対性理論	273
20.3	世界線の反射と力	279
20.4	5 次元時空とひも理論	281
	あとがき	285
	参考書	287
	索引	289

1. 複素数の基礎知識

1.1 複素数と物理学

加減乗除の代数学的計算が可能な数の体系は実数, 複素数, 四元数, 八元数しかないという代数学の定理がある. そこで, 4次元時空の物理法則は四元数で記述されなければならないと考えることは自然な行為である. 1843年に四元数を発見したハミルトン (William R. Hamilton) は四元数を物理学に応用することに後半生を捧げたが成功しなかった. その理由は, 相対性理論の発見を1905年まで待たなければならなかったことである. ハミルトンの四元数は時空の曲がりがないユークリッド時空の数学であるが, 相対性理論では時空は曲がっている. つまり, 物理法則は曲がった非ユークリッド時空に合った数学で記述されなければならない. 四元数を非ユークリッド時空に合うように作り変えなければ, 四元数で物理法則を記述することはできないだろう.

そこで, この本では四元数を作り変える前に, まず複素数を非ユークリッド時空で成り立つ新複素数に作り変えた. そのために, 複素数を使って相対性理論の公式を証明しようと試み, その結果からユークリッド時空の数学である複素数を非ユークリッド時空の新複素数に作り変えた. そして, この新複素数を使って相対性理論の公式を証明し, 新複素数の正しさを証明した. 次に, 複素数と同様に四元数を非ユークリッド時空の新四元数に作り変え, さらに四元数を拡張したグレイブズ (John T. Graves) の八元数を新八元数に作り変えた. 最終的に, 非ユークリッド4次元時空の数学である新八元数を使って相対性理論を計算しなおすと, 新しい時空の構造や質量の起源が明らかになるのである.

この文章を読んで, 複素数に加えて四元数や八元数も勉強しなければこの本の内容を理解できないと考える人がいるかもしれないが, この本を読むためには複素数の基本的知識だけで充分である. しかし, 複素数を習っていない人もいたので, 次の単元で必要な基本事項を説明する.

1.2 複素数の定義と公式

2乗して -1 になる数を虚数 i と書くと $i^2 = -1$ である. 我々が日常使う数は2乗しても負にならないので実数という. そして, 実数と虚数を組み合わせた数を複素数という. たとえば, a, b を実数とすれば複素数 A は $A = a + bi$ になる. a を実数成分, b を虚数成分という. ib のように虚数を実数の前に書くことが一般的であるが, 計算と理解が容易であるので, この本では bi のように実数の後に虚数を書く.

二つの複素数 $A = a + bi$ と $B = c + di$ があるとすると

$$\begin{aligned}A + B &= (a + bi) + (c + di) \\&= (a + c) + (b + d)i \\A \times B &= (a + bi)(c + di) \\&= ac + adi + bci + bdi^2 \\&= (ac - bd) + (ad + bc)i\end{aligned}$$

である. $A \div B$ は後で説明する. また, $A = B$ なら $a = c$, $b = d$ である. これを係数比較という.

複素数 A , B , C について

$$\begin{aligned}A + B &= B + A \\AB &= BA \\(A + B) + C &= A + (B + C) \\(AB)C &= A(BC) \\A(B + C) &= AB + AC\end{aligned}$$

という当たり前のことが成り立つが, 後で出てくるハミルトンの四元数では

$$AB \neq BA$$

である. つまり, 掛ける順番で結果が違ってくる.

$A = a + bi$ で bi の符号を負にした複素数を共役複素数といい $\bar{A} = a - bi$ と書く. そして, A の大きさを絶対値 A といい $|A|$ と書く. さらに

$$\begin{aligned}|A|^2 &= A\bar{A} \\&= (a + bi)(a - bi) \\&= a^2 - abi + bai - b^2i^2 \\&= a^2 + b^2\end{aligned}\tag{1.1}$$

である.

次ページの図 1.1 のように, 2 次元の座標平面で横向きの座標軸を実数軸, 縦方向の座標軸を虚数軸とすると, 複素数 $A = a + bi$ の実数軸成分は a , 虚数軸成分は b になる. そして, A は点 (a, b) で表される. また, $|A|$ は原点 O から点 A までの距離を表す. 三平方の定理から

$$|A|^2 = a^2 + b^2$$

は明らかであるので, (1.1) の $|A|^2 = A\bar{A}$ の定義は正しいことがわかる.

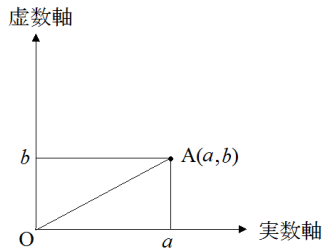


図 1.1

A による割り算 $1/A$ は分母分子に $\overline{A}$ を掛けて

$$\begin{aligned}\frac{1}{A} &= \frac{\overline{A}}{A\overline{A}} \\ &= \frac{\overline{A}}{|A|^2}\end{aligned}\tag{1.2}$$

で計算するので, $B \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}A \div B &= \frac{A}{B} \\ &= \frac{A\overline{B}}{B\overline{B}} \\ &= \frac{A\overline{B}}{|B|^2} \\ &= \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2}\end{aligned}$$

である.

また, 共役複素数について

$$\begin{aligned}\overline{A+B} &= \overline{A} + \overline{B} \\ \overline{AB} &= \overline{A} \overline{B}\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, 「**13.3 新八元数の定理**」の「**定理 3**」で説明するが, 四元数や新四元数, 新八元数では $\overline{A}$ と $\overline{B}$ の順番が逆になり

$$\overline{AB} = \overline{B} \overline{A}$$

である. 複素数では $\overline{A} \overline{B} = \overline{B} \overline{A}$ なので, 四元数や新四元数, 新八元数と同じように, 複素数でも

$$\overline{AB} = \overline{B} \overline{A}$$

としたほうが後で混乱することがない.

1.3 複素数と回転

この単元では, 高等学校で教えられることがあまりない複素数と回転について, 簡単な例を使って説明する.

まず, 掛け算を考える. $A = \sqrt{3} + i$, $B = 2 + 2\sqrt{3}i$ とすると, 図 1.2 のようになる.

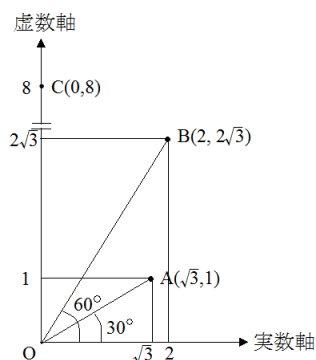


図 1.2

A と B の絶対値は (1.1) から

$$\begin{aligned} |A|^2 &= (\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i) \\ &= (\sqrt{3})^2 - i^2 \\ &= 3 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B|^2 &= (2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i) \\ &= 4 - (2\sqrt{3}i)^2 \\ &= 4 + 12 \\ &= 16 \end{aligned}$$

なので

$$|A| = 2, |B| = 4$$

である.

実数軸と線分 OA や OB が作る角を偏角というが, 三角形の辺の比から A と B の偏角はそれぞれ 30 度と 60 度である. ここで $A \times B$ を計算すると

$$\begin{aligned}
A \times B &= (\sqrt{3} + i)(2 + 2\sqrt{3}i) \\
&= 2\sqrt{3} + 2(\sqrt{3})^2i + 2i + 2\sqrt{3}i^2 \\
&= 2\sqrt{3} + 6i + 2i - 2\sqrt{3} \\
&= 8i
\end{aligned}$$

になる. $A \times B$ は, 虚数成分しか持たないので虚数軸上にあり偏角は 90 度である. この偏角 90 度は A の偏角 30 度に B の偏角 60 度を加えたものである. また, $A \times B$ の絶対値 8 は A の絶対値 2 に B の絶対値 4 を掛けたものである.

この例から推測できるように, 一般に

$$A \times B \text{ の偏角} = A \text{ の偏角} + B \text{ の偏角}$$

$$\text{絶対値 } |A \times B| = \text{絶対値 } |A| \times \text{絶対値 } |B|$$

である. つまり, $A \times B$ は原点 O を中心にして A を B の偏角だけ反時計回りに回転させ, 絶対値は $|A|$ を $|B|$ 倍した複素数であることを示している.

次に, 割り算を考える. $A = \sqrt{3} + i$, $C = 8i$ とすると, $C \div A$ は (1.2) から

$$\begin{aligned}
C \div A &= \frac{C}{A} \\
&= \frac{C\bar{A}}{A\bar{A}} \\
&= \frac{8i(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\
&= \frac{8\sqrt{3}i - 8i^2}{3 - i^2} \\
&= \frac{8 + 8\sqrt{3}i}{4} \\
&= 2 + 2\sqrt{3}i
\end{aligned}$$

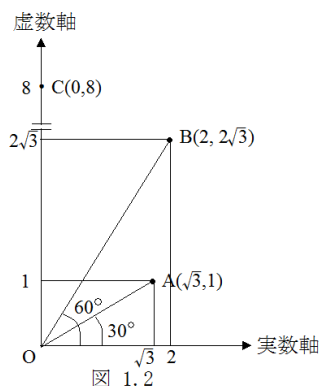
なので点 B と一致する. 絶対値は

$$\begin{aligned}
|C \div A|^2 &= (2 + 2\sqrt{3}i)(2 - 2\sqrt{3}i) \\
&= 4 - 4(\sqrt{3})^2i^2 \\
&= 4 + 12 \\
&= 16
\end{aligned}$$

なので

$$|C \div A| = 4$$

である. 図は図 1.2 のようになる.



辺の比から、 $C \div A$ の偏角は 60 度であり C の偏角 90 度から A の偏角 30 度を引いた数である。また、 $C \div A$ の絶対値は C の絶対値 8 を A の絶対値 2 で割った数である。

このことから推測できるように、一般に

$$(C \div A \text{ の偏角 }) = (C \text{ の偏角 }) - (A \text{ の偏角 }) \quad (1.3)$$

$$\text{絶対値 } |C \div A| = \text{絶対値 } |C| \div \text{絶対値 } |A| \quad (1.4)$$

である。つまり、 $C \div A$ は原点 O を中心にして C を A の偏角だけ時計回りに回転させ、絶対値は $|C|$ を $|A|$ で割った複素数であることを示している。

以上の結果から、複素数の掛け算と割り算は原点 O を中心にした回転であり、掛け算では偏角を足し、割り算では偏角を引くことがわかった。

三角関数 $\sin \theta$ や $\cos \theta$ (θ はシータと発音する) を使って一般的に説明することもできる。しかし、「**13.3 新八元数の定理**」の「**定理 10**」で説明するように、曲がった非ユークリッド時空では角 θ は回転により変化するので $\sin \theta$ や $\cos \theta$ は意味を持たない。そこで、この本では $\sin \theta$ や $\cos \theta$ を使わないようにしている。

2. 複素数による座標変換

2.1 座標変換とは

複素数を使って相対性理論のローレンツ変換を求めるために、複素数による座標変換の一般式を作る必要がある。そこで、まず座標変換について説明する。ある点 R を二人の観測者 P と Q が観測した場合を考える。 P は静止し Q は移動しているとする。このとき、 P が観測した R の時間 t と位置 x は Q が観測した R の時間 t' や位置 x' とは異なっていると考えられる。時間については不明だが距離が違うことは明らかである。「座標」は見え方を意味するので、 P から見た R の座標 (t, x) と Q から見た R の座標 (t', x') は異なっている。

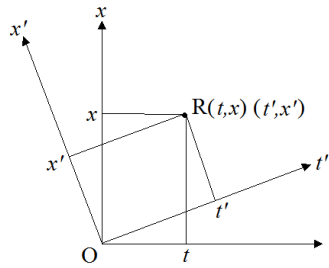


図 2.1

図 2.1 のように 2 次元座標平面で横軸を時間軸、縦軸を距離軸とする。 R の位置を固定した場合、 R から各座標軸に下した垂線が座標軸と交わる点がそれぞれの座標成分を表すので、 P の t 軸と x 軸に対して Q の t' 軸と x' 軸は原点 O を中心にして回転している。

P から見た R の座標 (t, x) を Q から見た R の座標 (t', x') に数学的に変えることを「座標変換」というので、 (t', x') と (t, x) の関係を表す式が座標変換式である。相対性理論のローレンツ変換は座標変換式である。ローレンツ変換は光速不変の原理を使って求められたが、この本では複素数を使った座標変換で求める。

また、相対性理論では、時間と距離を座標平面に表すときに、距離 x を横軸に書き、時間 t を縦軸に書いてミンコフスキー (Minkowski) 座標やミンコフスキー時空という。しかし、「7.3 世界距離の 2 乗が負であることの解釈」で説明するが、世界距離は固有時間であることから、4 次元時空では時間が主役である。つまり、空間に付随して時間

があるのではなく時間に付随して空間があるので、横軸を時間軸、縦軸を距離軸とする。また、この座標平面ではミンコフスキー時空図とは異なり、直線の傾きが速度を表すので計算と理解がしやすいという利点がある。

2.2 複素数による座標変換の一般式

図 2.2 のような 2 次元の複素平面を考える。

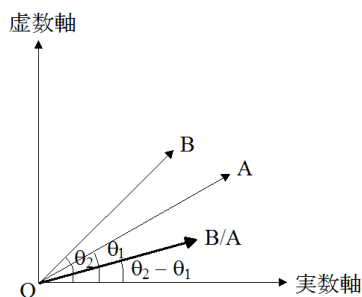


図 2.2

複素数 A と B の絶対値を $|A|$, $|B|$ とし、複素数 A と B が実数軸と作る偏角を $\arg A = \theta_1$, $\arg B = \theta_2$ とする。割り算 $B \div A$ で得られた複素数 B/A について、その絶対値と偏角は「1.3 複素数と回転」で説明した式 (1.3) と (1.4) から

$$\left| \frac{B}{A} \right| = \frac{|B|}{|A|} \quad (2.1)$$

$$\arg(B/A) = \arg B - \arg A = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.2)$$

である。図 2.2 で $\angle AOB = \theta_2 - \theta_1$ なので、 O を中心にして実数軸を反時計回りに回転させて A に重ねると、 B/A は B と重なり図 2.3 のようになる。

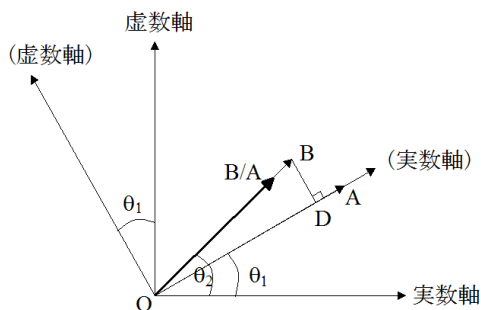


図 2.3

複素数 B/A を $|A|$ 倍した $(B/A)|A|$ は (2.1) から

$$\begin{aligned}\left|\frac{B}{A}\right| |A| &= \frac{|B|}{|A|} |A| \\ &= |B|\end{aligned}$$

なので、絶対値が $|B|$ になり、 $(B/A)|A|$ は A を新しい実数軸とした時の B の実数成分と虚数成分を表す。つまり、 B から A に対して引いた垂線の交点を D とすると

$$\frac{B}{A} |A| = |OD| + |BD|i \quad (2.3)$$

になる。 i は虚数であり、 $|OD|$ と $|BD|$ は複素数の絶対値ではなく、2点間の距離を表す。(2.3) からわかるように、 $(B/A)|A|$ は A から見たときの B の見え方を表しているので、 A による B の座標変換である。

図 2.3 で、回転前の虚数軸の i と回転後の虚数軸の i は位置が違うので同じ i ではないと考える人がいるかもしれないが、実数軸は回転せず A と B が実数軸方向に回転するのが正しい図なので二つの i は同じである。理解しやすいように、座標軸を回転させただけである。今後はこの形で図を描くことにする。係数比較をしてよい場合といけない場合については、「13.3 新八元数の定理」の「定理 9」で説明する。

(2.3) の左辺の割り算の式を掛け算の式にするために、共役複素数 $\overline{A}$ を分母分子に掛けると

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} |A| &= \frac{B |A| \overline{A}}{A \overline{A}} \\ &= \frac{B |A| \overline{A}}{|A|^2} \\ &= \frac{B \overline{A}}{|A|}\end{aligned}$$

になる。つまり

$$\frac{B \overline{A}}{|A|} \quad (2.4)$$

は、 A による B の座標変換を表す式である。

前の単元の観測者 P と Q 、観測される点 R の例に当てはめると、複素数 B は静止した観測者 P から見た R の座標 (x, t) を表し、複素数 A は移動する観測者 Q の座標を表し、(2.4) は Q から見た R の座標 (x', t') を表す。「3.3 複素数によるローレンツ変換の導出」で、(2.4) を使って (x, t) と (x', t') の関係を計算する。

以上の結果から、移動する観測者 Q による座標変換の式は、 Q の座標を表す複素数を A とすると

$$\frac{\overline{A}}{|A|} \quad (2.5)$$

である.

2.3 座標変換における物理量の不変性

ここで (2.5) の重要な性質を説明する. 「7.1 相対性理論の世界距離の定義」で説明するが, 相対性理論ではローレンツ変換で絶対値が変化しない量を「座標変換で不変な量」という. そして, 座標変換で不変になるように世界距離や 4 元速度, 4 元運動量を定義して, 4 次元時空での質点の運動を考える. つまり, 物理学では絶対値を変えない座標変換が重要である. 複素数による座標変換 (2.4) は, 計算の過程や図 2.3 からわかるように B の見え方, つまり, B の座標成分を変えるだけで B の大きさは変えない. 次に, このことを証明する. B を A で座標変換した後の複素数を F とすると

$$\frac{B\bar{A}}{|A|} = F$$

と書くことができる. このとき F の絶対値 $|F|$ は

$$\begin{aligned} |F|^2 &= F\bar{F} \\ &= \frac{B\bar{A}}{|A|} \frac{A\bar{B}}{|A|} \\ &= \frac{|A|^2 |B|^2}{|A|^2} \\ &= |B|^2 \end{aligned}$$

である. つまり, $B\bar{A}/|A|$ の大きさは B と同じなので, 座標変換 $\bar{A}/|A|$ は複素平面で B の大きさ, つまり, B の原点 O からの距離 $|OB|$ を変えない.

2.4 座標変換の逆変換

次に, $\bar{A}/|A|$ の逆変換, つまり $B\bar{A}/|A|$ を B に戻す変換式を求める.

$$\frac{B\bar{A}}{|A|} = F$$

の両辺に $A/|A|$ を掛けると

$$\begin{aligned} \frac{B\bar{A}}{|A|} \frac{A}{|A|} &= F \frac{A}{|A|} \\ \frac{B|A|^2}{|A|^2} &= F \frac{A}{|A|} \\ B &= F \frac{A}{|A|} \end{aligned}$$

よって, $\overline{A}/|A|$ の逆変換, つまり F を B に戻す変換は

$$\frac{A}{|A|}$$

である. このことは

$$\begin{aligned}\frac{\overline{A}}{|A|} \frac{A}{|A|} &= \frac{|A|^2}{|A|^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

からも証明できる.

3. 複素数とローレンツ変換

3.1 標準的ローレンツ変換の導出法

複素数による座標変換の式 $\bar{A}/|A|$ を用いて相対性理論のローレンツ変換を導く前に、相対性理論でローレンツ変換を求める方法を説明する。これは相対性理論の本に書かれている標準的な方法である。ただし、以下で述べる観測者 A の記号 A は座標変換の式 $\bar{A}/|A|$ の複素数 A とは異なる。

時刻 0 に原点 O から放出された光の先端の 4 次元時空の座標が、観測者 A から見ると (ct, x, y, z) であり観測者 B から見ると (ct', x', y', z') であるとする。 c は光速度、 t は時間、 x, y, z は距離を表す。光の先端は、時刻 t に 3 次元空間で半径 ct の球面を作るので、その方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2 \quad (3.1)$$

である。

A と B が時刻 0 に原点 O で一致していたとする。「静止している人が観測しても運動している人が観測しても光速は一定の値 c である」という光速不変の原理から、 B がどこにいても B から見た球面の方程式は

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \quad (3.2)$$

になる。 B が A に対して x 軸方向に等速度 v で運動している場合に $y = y' = 0, z = z' = 0$ と考えると、(3.1) と (3.2) は $x \geq 0, t \geq 0$ の条件で

$$x = ct$$

$$x' = ct'$$

になる。定数 a を使って、この二つの式を満たす関数を

$$x' = a(x - vt)$$

$$x = a(x' + vt')$$

と仮定すると、上記の四つの式から

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

になり, ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

を導き出すことができる. 計算は省略する.

相対性理論では

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

と仮定していることが「10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出」で問題になる.

3.2 複素数による座標変換の前提条件

複素数による座標変換の式 $\bar{A}/|A|$ を使って相対性理論のローレンツ変換を導くためには, 以下の3項目を前提とする.

- (1) 時間 t と距離 x を足したり引いたりするためには, それぞれの単位を同じにしなければならない. そこで, 時間 t に光速 c を掛けた ct で時間を計算する. 光速の単位は距離 ÷ 時間なので時間を掛ければ, その単位は距離になる.
- (2) x を横軸, ct を縦軸とする相対性理論のミンコフスキー時空と異なり, ct を横軸, x を縦軸とする複素平面で考え, 座標は (ct, x) で表す. この方法では直線の傾きが速度を表すので, 作図や計算がしやすいという利点がある.
- (3) 座標 (ct, x) を表す複素数は $ct + xi$ である.

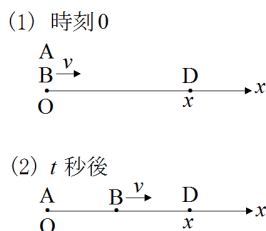


図 3.1

以上の三つの前提条件のもとに, x 軸上の運動を考える. 図 3.1 のように, 観測者 A は原点 O に静止し, 観測者 B は x 軸の正方向に等速度 v で直線運動をしているとする. また, 観測される点 D は距離 x の位置に静止し, 時刻 0 のときに A と B は原点 O で一致していたとする. t 秒後には A は時刻 t 距離 0, B は時刻 t 距離 vt , D は

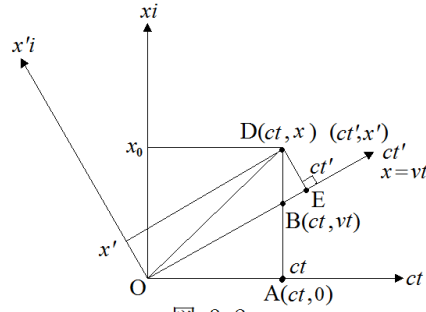


図 3.2

図 3.2 のように, B が移動する直線 $x = vt$ を新しい実数軸, つまり ct' 軸とし, 原点 O を通り $x = vt$ に垂直な直線を新しい虚数軸, つまり $x'i$ 軸とすると, B から見た D の座標は (ct', x') である. ただし, 時刻 0 のときに A と B は原点 O で一致していたので, $ct = x = 0$ のとき, $ct' = x' = 0$ となる. D から直線 $x = vt$ に引いた垂線の ct' 軸との交点を E とすると

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= |OE| + |DE|i \\ &= ct' + x'i \end{aligned} \quad (3.7)$$

である. ただし, $|OE|$ と $|DE|$ は複素数の絶対値ではなく, 2 点間の距離を表す.

複素数 $B = ct + vti$ と $D = ct + xi$ を使って $D\bar{B}/|B|$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{D\bar{B}}{\sqrt{|B|^2}} \\ &= \frac{(ct + xi)(ct - vti)}{\sqrt{(ct + vti)(ct - vti)}} \\ &= \frac{c^2t^2 - cvt^2i + xcti - xvti^2}{\sqrt{c^2t^2 - v^2t^2i^2}} \\ &= \frac{c^2t^2 + xvt - cvt^2i + xcti}{\sqrt{c^2t^2 + v^2t^2}} \end{aligned}$$

になる. $ct > 0$ の条件では

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{c^2t(t + vx/c^2) + ct(x - vt)i}{ct\sqrt{1 + v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(t + vx/c^2) + (x - vt)i}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

である. (3.7) と (3.8) はどちらも $D\bar{B}/|B|$ なので

$$ct' + x'i = \frac{c(t + vx/c^2) + (x - vt)i}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}$$

である. 実数部分と虚数部分の係数を比較して

$$t' = \frac{t + (v/c^2)x}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (3.9)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (3.10)$$

になる. (3.9) と (3.10) は, 観測者 A から見た D の座標 (ct, x) と等速度 v で直線運動をする観測者 B から見た D の座標 (ct', x') の関係を表している. つまり, 座標変換の式である.

次に, (3.9) と (3.10) を相対性理論のローレンツ変換と比較してみる. ローレンツ変換は, 「3.1 標準的ローレンツ変換の導出法」で説明したように

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

である. (3.9), (3.10) と (3.3), (3.4) を比較すると, (3.9), (3.10) で c^2 の符号を (+) から (-) にすると (3.3), (3.4) と同じ式になることがわかる. (3.9), (3.10) を導き出すために使った複素平面は, 時空の曲がりがないユークリッド平面であるが, 一般相対性理論によれば時空は曲がっている. つまり, (3.9), (3.10) はユークリッド時空における相対性理論の式であり, (3.3), (3.4) は曲がった非ユークリッド時空における相対性理論の式である. そして, その違いは c^2 の符号が (+) になるか (-) になるかによって決まる. また, 一般相対性理論では質量が空間を曲げるのであるが, 上の結果から, まだ質量が存在しないローレンツ変換の段階で, すでに時空は曲がっていることがわかる.

3.4 第4の虚数 h

ハミルトンは複素数 $a + bi$ を拡張して, 4次元時空における点の位置を四元数 $a + bi + cj + dk$ で表している. a, b, c, d は実数であり, i, j, k は虚数である. また, 演算規則は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

である. 19世紀の後半に, この四元数を使って物理法則を記述しようと試みられたが成功しなかった. その理由として, ハミルトンの四元数が成り立つ4次元時空はユー

クリッド時空であることが考えられる。複素数を拡張した四元数を曲がった非ユークリッド時空における座標変換に使おうとすれば、新しい虚数の導入が必要になる。そこで、第4の虚数 h を仮定する。演算規則は

$$h^2 = -1$$

$$hi = ih, hj = jh, hk = kh$$

とする。 i, j, k の演算規則はハミルトンの四元数と同じである。

計算するとわかるが、 $hi = -ih$ にすると計算が複雑になりローレンツ変換を導くことができない。また、 i, j, k は $ij = k$ のように相互の関係があるが、 h は $hi = ih$ のように i, j, k と相互関係がない。その理由は、我々は空間から空間へは移動できるが時間から空間へは移動できないことである。 h は時間を表し i, j, k は空間を表すので、 h は i, j, k と無関係である。逆にいえば、数学的に $hi = ih, hj = jh, hk = kh$ なので我々は空間から時間へ移動することができない。つまり、時間旅行ができないのである。

今後は、4次元時空における点の位置を新四元数 $ah + bi + cj + dk$ で表すことにする。ただし、 c は光速の c ではない。また、 a は時間座標であり、 b, c, d は空間座標である。新四元数で $c = d = 0$ にしたものが新複素数 $ah + bi$ である。新複素数を使えば、時間は ct に虚数 h を掛けて cth で計算することになる。ただし、この場合の c は光速である。 $(cth)^2 = -c^2t^2$ なので、この新しい時間の単位 cth を使って座標変換 $D\bar{B}/|B|$ を行えば、(3.9), (3.10) の c^2 の符号が (+) から (-) に変わることが予想される。

3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出

新複素数 $ah + bi$ を使うと、新複素平面で横軸は cth 軸、縦軸は xi 軸になる。観測者 A , 観測者 B , 静止点 D について、座標 $A(ct, 0)$, $B(ct, vt)$, $D(ct, x)$ は変わらないが、位置を表す新複素数は $A = cth$, $B = cth + vti$, $D = cth + xi$ になる。再び $D\bar{B}/|B|$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{D\bar{B}}{\sqrt{|B|^2}} \\ &= \frac{(cth + xi)(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}} \\ &= \frac{c^2t^2h^2 - cvt^2hi + xcthi - xvti^2}{\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2}} \\ &= \frac{-c^2t^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

である. (3.11) の分母は

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2} &= \sqrt{-c^2t^2 + v^2t^2} \\ &= \sqrt{-c^2t^2(1 - v^2/c^2)}\end{aligned}\quad (3.12)$$

なので, 観測者 B の速度 v が光速 c を超えない $v < c$ のとき, $\sqrt{\quad}$ の中は負になる. そこで, 「 $\sqrt{\quad}$ の中が負のときは, 負の原因となっている $c^2t^2h^2$ を $\sqrt{\quad}$ から出す」という原則を採用すると

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2} &= cth\sqrt{1 - (v^2t^2i^2)/(c^2t^2h^2)} \\ &= cth\sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}\quad (3.13)$$

になる. ただし, $ct > 0$ であり, $\sqrt{h^2} = h$ とする.

付け加えると, (3.12) で $v > c$, つまり速度 v が光速 c を超えた時は

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2} &= \sqrt{-c^2t^2 + v^2t^2} \\ &= \sqrt{c^2t^2(v^2/c^2 - 1)} \\ &= ct\sqrt{v^2/c^2 - 1}\end{aligned}$$

になり, この分母を使って座標変換の計算を行なえば, 超光速時の相対性理論の式を求めることができる. その計算は, 「**19.1 超光速時の新ローレンツ変換**」で説明する.

さて, (3.13) を (3.11) に当てはめて再び計算すると

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{D\bar{B}}{\sqrt{|B|^2}} \\ &= \frac{-c^2t^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2}} \\ &= \frac{-c^2t(t - vx/c^2) + ct(x - vt)hi}{cth\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{-(c/h)(t - vx/c^2) + (x - vt)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{-(ch/h^2)(t - vx/c^2) + (x - vt)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(t - vx/c^2)h + (x - vt)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\quad (3.14)$$

である. 新複素数を使うとき, B から見た D の位置を表す新複素数は $ct'h + x'i$ なので, (3.14) から

$$ct'h + x'i = \frac{c(t - vx/c^2)h + (x - vt)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である．実数部分と虚数部分の係数を比較して

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.15)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.16)$$

になる．(3.15), (3.16) は「**3.1 標準的ローレンツ変換の導出法**」で説明したローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

と同じである．

以上のように，新複素数 $cth + xi$ を使い座標変換 $D\bar{B}/|B|$ を行えば，ローレンツ変換を求めることができる．つまり，第4の虚数 h は仮定の数ではなく，曲がった4次元時空を記述するために必要な数である．今後，新四元数 $cth + xi + yj + zk$ で4次元時空における点の位置を表し， $y = z = 0$ の場合に新複素平面における位置を表すと考える．

相対性理論で時間 ct に虚数 i を掛けて cti で計算することがある．しかし，その場合は距離 x, y, z は実数のままで計算するので， cti は新四元数の cth とは異なる数である．相対性理論の cti は計算の便宜のために考えられているので時空の実態を表さないが，新四元数 $cth + xi + yj + zk$ の cth は曲がった時空の性質を表しており時空の研究に必須の数である．

新四元数や新複素数の正しさを証明するために，非ユークリッド時空を平面の紙に書き，世界線の方程式の交点の座標からローレンツ変換を導き出せることを，「**5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法**」で説明する．

また，(3.14) を求めるときに $ct > 0$ の条件を使ったが， $t > 0$ に限定しているのではない． $t < 0$ のときに $c < 0$ であれば $ct > 0$ になるので， $t < 0$ の条件でもローレンツ変換は成り立つ．しかし，光速 c の符号が時間 t の正負により変化するとローレンツ変換の普遍性が失われるので， c は常に正であるとして議論を進める．

3.6 時間が正の方向にしか進まない理由

前の単元で光速 c は常に正と仮定したが，その仮定を使うと我々の世界で時間が正の方向にしか進まない理由を説明できる．

前の単元の

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(cth + xi)(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}} \\ &= \frac{-c^2t^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2}}\end{aligned}\quad (3.11)$$

を, $c > 0$, $t < 0$ の条件で解くと $ct < 0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{-c^2t^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2}} \\ &= \frac{-c^2t(t - vx/c^2) + ct(x - vt)hi}{-cth\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{(c/h)(t - vx/c^2) - (x - vt)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(vx/c^2 - t)h + (vt - x)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\quad (3.17)$$

になる. B から見た D の位置を表す新複素数は $ct'h + x'i$ なので, (3.17) から

$$ct'h + x'i = \frac{c(vx/c^2 - t)h + (vt - x)i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 実数部分と虚数部分の係数を比較して

$$\begin{aligned}t' &= \frac{(v/c^2)x - t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ x' &= \frac{vt - x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\quad (3.18)$$

になる. (3.18) で $x = 0$ の場合

$$t' = \frac{-t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. この式から, A が観測する D の時間 t と B が観測する D の時間 t' の符号が逆になる. B の速度 v を 0 にすれば A と同じになるので, t と t' の符号が逆になることはおかしい. そこで, 最初の仮定 $c > 0$, $t < 0$ が間違っていると考えられる. つまり, 数学的計算によれば, 我々の世界では時間 t は正の方向に進むことしかできないことになる. これが, 我々が過去に戻るできない理由である.

また, 超光速時にも時間を逆行できないことを, 「**19.2 超光速時の固有時間**」で証明する.

4. 新複素平面と斜交座標軸

4.1 座標軸回転を表す新複素数

複素平面は曲がないユークリッド平面なので、回転で角は変化せず、図 3.2 のように直線 $x = vt$ を新しい実数軸 ct' 軸とすると、新しい虚数軸 $x'i$ 軸は原点 O を通り直線 $x = vt$ に垂直な直線になる。

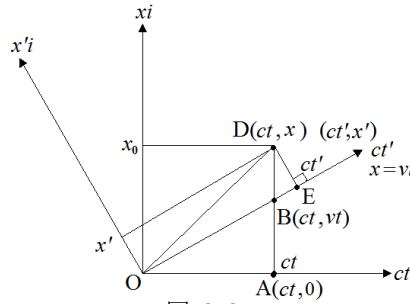


図 3.2

これに対して、新複素平面は曲がった非ユークリッド平面なので新しい虚数軸 $x'i$ 軸がどこに移動するかは不明である。 $x'i$ 軸の場所がわからなければ図で考えることが困難なので、この単位では $x'i$ 軸がどこに移動するかを計算する。また、新虚数 h が架空の数か実態をもつ数かを調べるためにもこの計算は必要である。

観測者 B が観測者 A の x 軸方向に等速度 v で運動しているとき、 A と B の新複素数は $A = cth$ 、 $B = cth + vti$ である。 A の時刻が t_0 の場合を考える。 A と B の時刻 t_0 は同じなので、図 4.1 のようになる。

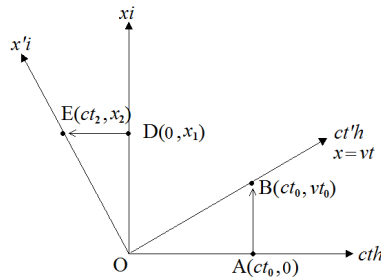


図 4.1

このとき、座標変換で cth 軸上の点 $A(ct_0, 0)$ が $ct'h$ 軸上の点 $B(ct_0, vt_0)$ へ移り、 xi 軸上の点 $D(0, x_1)$ が $x'i$ 軸上の点 $E(ct_2, x_2)$ に移る。ただし、 A, B, D, E の座標はすべて A から見た座標である。 B の座標が B から見た座標の場合には、 A と B の新複素数 $A = ct_0h$ と $B = ct_0h + vt_0i$ の虚数 h が同じ座標軸上にないので下の議論は成り立たない。このことは「**13.3 新八元数の定理**」の「**定理 9**」で説明する。

A から B への移動は原点中心の回転なので新複素数 H で表すことができる。なお、原点中心の回転でなければ、その移動は新複素数にならない。 A と B の新複素数は $A = ct_0h$, $B = ct_0h + vt_0i$ なので、 $AH = B$ から

$$\begin{aligned} ct_0hH &= ct_0h + vt_0i \\ H &= \frac{ct_0h + vt_0i}{ct_0h} \quad (: t_0 \neq 0) \\ &= 1 + \frac{vi}{ch} \\ &= 1 + \frac{vih}{ch^2} \\ &= 1 - \frac{v}{c}hi \end{aligned} \tag{4.1}$$

になる。(4.1) は、 cth 軸を $ct'h$ 軸にする新複素数である。

4.2 斜交座標軸の証明

図 4.1 の D, E について、新複素数は $D = x_1i$, $E = ct_2h + x_2i$ であり、 A を B に移した変換 H で D を E へ移すので、 $DH = E$ から

$$x_1iH = ct_2h + x_2i$$

である。この式に (4.1) を代入して

$$\begin{aligned} ct_2h + x_2i &= x_1i(1 - \frac{v}{c}hi) \\ &= x_1i - \frac{vx_1}{c}hi^2 \\ &= x_1i + \frac{v}{c}x_1h \\ &= \frac{v}{c}x_1h + x_1i \end{aligned}$$

である。係数を比較して

$$ct_2 = \frac{v}{c}x_1, \quad x_2 = x_1$$

になる。二つの式から x_1 を消去すると

$$x_2 = \frac{c}{v}(ct_2) \tag{4.2}$$

になる. (4.2) が $x'i$ 軸の方程式である. 時間軸の単位は ct なので, $x'i$ 軸の傾きは c^2/v ではなく c/v である. cth 軸が移動した $ct'h$ 軸の方程式は

$$x = vt = \frac{v}{c}(ct)$$

なので傾きは v/c になり, 図 4.2 のように $x'i$ 軸と $ct'h$ 軸は xi 軸と cth 軸から同じ角度で内向きに傾いている. つまり, $x'i$ 軸と $ct'h$ 軸は斜交座標軸である.

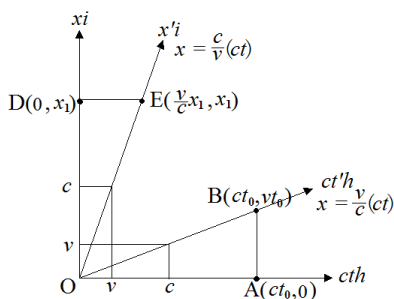


図 4.2

以上の結果から, 新複素平面では対になっている座標軸のうちの一つの座標軸を移動させると, 新しい対の座標軸は常に斜交座標軸になる. 相対性理論でも座標軸が斜交座標になることがわかっているが, そのままの計算では直角座標になるため時間成分を一時的に虚数 cti にして計算することがある. しかし, 上に述べたように, 新複素数では斜交座標軸を作るための特別な操作は不要である.

相対性理論の説明で使われるミンコフスキー時空図は曲がりがないユークリッド平面なので, 座標軸は回転すると直交座標になる. これに対して, 新複素平面では座標軸の回転は斜交座標を形成する. この点でも新複素平面はミンコフスキー時空図よりも優れている.

4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法

新複素平面における座標軸は必ず斜交座標軸になることがわかったので, ある座標軸の方程式が与えられたときに対になる座標軸の方程式を求める簡単な方法を説明する.

世界線の方程式が $x = ct$ なので, 光は両座標軸から等距離の直線である. 直交座標軸から同じ角度で内向きに傾いている斜交座標軸は光に対して線対称なので, cth 軸と xi 軸を入れ替えても同じになる. そこで, 与えられた方程式で ct を x に, x を ct に

置き換えれば対になる座標軸の方程式を求めることができる。例えば、図 4.2 の $ct'h$ 軸の方程式

$$x = vt = \frac{v}{c}(ct)$$

で ct を x に、 x を ct に置き換えると

$$ct = \frac{v}{c}x$$

になる。変形すると

$$x = \frac{c}{v}(ct)$$

となり、(4.2) と一致する。

この方法を使えば、座標軸が曲線の時にも対になる座標軸の方程式を簡単に求めることができる。座標軸が曲線の時とは、すなわち、観測者 B が加速度運動をする時である。それについては、「**20.2 一般相対性理論**」で説明する。

5. 新複素平面上の距離と ローレンツ変換

5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法

「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で証明したように、静止している観測者 A と等速度 v で直線運動している観測者 B 、観測される点 D の新複素数はそれぞれ $A = cth$, $B = cth + vti$, $D = cth + xi$ である。そして、座標変換 $D\bar{B}/|B|$ でローレンツ変換を求めることができる。

新複素数を使ってローレンツ変換を求める第2の方法として、新複素平面における世界線の交点の座標からローレンツ変換を求める方法がある。この方法では、相対性理論でローレンツ変換を求めるときに使う光の放出も新複素数による座標変換も必要とされない。

図 3.1 と同じように、観測者 A は原点 O に静止し、観測者 B は x 軸の正方向に等速度 v で直線運動をしているとする。また、静止点 D は距離 x_0 の位置に静止し、時刻 0 のときに A と B は原点 O で一致していたとする。 t_0 秒後の A, B, D の座標は $A(ct_0, 0)$, $B(ct_0, vt_0)$, $D(ct_0, x_0)$ であり、新複素平面で表すと図 5.1 のようになる。

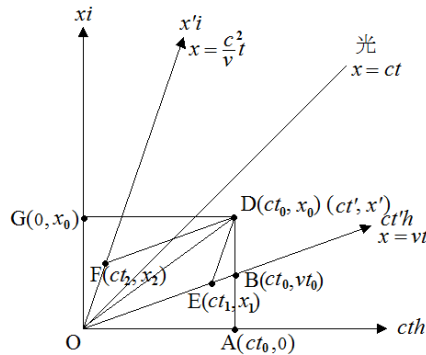


図 5.1

A は cth 軸上を移動する。 B は直線 $x = vt$, つまり, $ct'h$ 軸上を移動する。 D から xi 軸に下ろした垂線の交点を G とすると, D は直線 GD 上を移動する。 D から $x'i$ 軸に平行に引いた直線と直線 $x = vt$ との交点を E とする。 D から $ct'h$ 軸に平行に引い

た直線と $x'i$ 軸との交点を F とする。「4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法」で説明したように、 $ct'h$ 軸の方程式

$$x = vt = \frac{v}{c}(ct)$$

で x を ct に ct を x に置き換えた式

$$\begin{aligned} ct &= \frac{v}{c}x \\ x &= \frac{c^2}{v}t \end{aligned}$$

が $x'i$ 軸の方程式である。

観測者 B の斜交座標軸である $ct'h$ 軸と $x'i$ 軸から見た D の座標 (ct', x') は、交点 E, F の原点 O からの距離である。つまり

$$ct' = |OE| = |DF|, \quad x' = |OF| = |DE| \quad (5.1)$$

である。ただし、 $|OE|, |DF|, |OF|, |DE|$ は複素数の絶対値ではなく、2 点間の距離を表す。以下で直線の交点の座標から t' と x' を求める。

(1) 点 E の座標から t' を求める

$x'i$ 軸の方程式

$$\begin{aligned} x &= \frac{c^2}{v}t \\ &= \frac{c}{v}(ct) \end{aligned}$$

から、その傾きは c/v である。直線 DE は $x'i$ 軸に平行なので傾きは c/v である。そして、点 $D(ct_0, x_0)$ を通るので、直線 DE の方程式は

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{c}{v}(ct - ct_0) \\ x &= \frac{c^2}{v}(t - t_0) + x_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。直線 OB の方程式は

$$x = vt \quad (5.3)$$

なので、(5.2) と (5.3) から x を消去すると

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{v}(t - t_0) + x_0 &= vt \\
\frac{c^2}{v}t - vt &= \frac{c^2}{v}t_0 - x_0 \\
\frac{(c^2 - v^2)}{v}t &= \frac{c^2}{v}t_0 - x_0 \\
(c^2 - v^2)t &= c^2t_0 - vx_0 \\
t &= \frac{c^2t_0 - vx_0}{c^2 - v^2} \quad (: c \neq v)
\end{aligned} \tag{5.4}$$

になる. (5.4) を (5.3) に代入して

$$x = \frac{v(c^2t_0 - vx_0)}{c^2 - v^2} \tag{5.5}$$

になる. E の座標を (ct_1, x_1) とすると, (5.4) と (5.5) から

$$ct_1 = \frac{c(c^2t_0 - vx_0)}{c^2 - v^2}, \quad x_1 = \frac{v(c^2t_0 - vx_0)}{c^2 - v^2} \tag{5.6}$$

である. ただし, (ct_1, x_1) は ct 軸と xi 軸から見た座標である.

新複素数による距離の定義と (5.6) から, 原点 O と点 E の距離 $|OE|$ は

$$\begin{aligned}
|OE|^2 &= E\bar{E} \\
&= (ct_1h + x_1i)(ct_1h - x_1i) \\
&= -c^2t_1^2 + x_1^2 \\
&= -\frac{c^2(c^2t_0 - vx_0)^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{v^2(c^2t_0 - vx_0)^2}{(c^2 - v^2)^2} \\
&= -\frac{(c^2t_0 - vx_0)^2}{c^2 - v^2} \\
&= -\frac{c^2(t_0 - vx_0/c^2)^2}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

である.

$$ct' = |OE| = |DF|, \quad x' = |OF| = |DE| \tag{5.1}$$

から点 E を表す座標変換後の B から見た新複素数は $ct'h$ なので

$$\begin{aligned}
|OE|^2 &= (ct'h)^2 \\
&= -c^2t'^2
\end{aligned} \tag{5.8}$$

である. (5.7) と (5.8) は等しいので

$$\begin{aligned} -c^2 t'^2 &= -\frac{c^2(t_0 - vx_0/c^2)^2}{1 - v^2/c^2} \\ t'^2 &= \frac{(t_0 - vx_0/c^2)^2}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (5.9)$$

になる.

(5.9) から t' を求めるために (5.9) の分母と分子の符号を調べなければならない.
 $c > v$ のとき, (5.9) の分母は

$$1 - v^2/c^2 > 0 \quad (5.10)$$

である. 分子の符号を調べるための計算は少し複雑である.

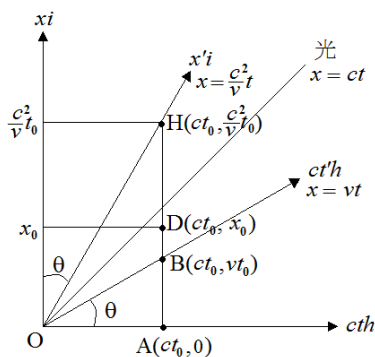


図 5.2

図 5.2 のように直線 AD と $x'i$ 軸との交点の座標を H とすると, その x 座標は $x'i$ 軸の方程式

$$x = \frac{c^2}{v} t$$

に $t = t_0$ を代入して

$$\frac{c^2}{v} t_0$$

である. 点 $D(ct_0, x_0)$ は点 H よりも下方に存在するので

$$\frac{c^2}{v} t_0 \geq x_0$$

である. よって (5.9) の分子は

$$t_0 - vx_0/c^2 \geq t_0 - \frac{c^2}{v} t_0 v/c^2 = t_0 - \frac{c^2 v t_0}{c^2 v} = 0$$

$$t_0 - vx_0/c^2 \geq 0 \quad (5.11)$$
$$t' = \frac{t_0 - (v/c^2)x_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

(2) 点 F の座標から x' を求める

$$\begin{aligned} x &= vt \\ &= \frac{v}{c}(ct) \end{aligned}$$

45

直線 DF は $ct'h$ 軸に平行なので傾きは v/c である. そして直線 DF は点 $D(ct_0, x_0)$ を通るので, その方程式は

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{v}{c}(ct - ct_0) \\ x &= v(t - t_0) + x_0 \end{aligned} \quad (5.12)$$

である. 直線 OF の方程式は $x'i$ 軸と同じなので

$$x = \frac{c^2}{v}t \quad (5.13)$$

である. (5.12) と (5.13) から x を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{v}t &= v(t - t_0) + x_0 \\ \frac{(c^2 - v^2)}{v}t &= -vt_0 + x_0 \\ t &= \frac{v(x_0 - vt_0)}{c^2 - v^2} \quad (: c \neq v) \end{aligned} \quad (5.14)$$

である. (5.14) を (5.13) に代入して

$$x = \frac{c^2(x_0 - vt_0)}{c^2 - v^2} \quad (5.15)$$

になる. 点 F の座標を (ct_2, x_2) とすると (5.14) と (5.15) から

$$ct_2 = \frac{cv(x_0 - vt_0)}{c^2 - v^2}, \quad x_2 = \frac{c^2(x_0 - vt_0)}{c^2 - v^2} \quad (5.16)$$

である. ただし, (ct_2, x_2) は cth 軸と xi 軸から見た座標である.

新複素数による距離の定義と (5.16) から

$$\begin{aligned} |OF|^2 &= F\overline{F} \\ &= (ct_2h + x_2i)(ct_2h - x_2i) \\ &= -c^2t_2^2 + x_2^2 \\ &= -\frac{c^2v^2(x_0 - vt_0)^2}{(c^2 - v^2)^2} + \frac{c^4(x_0 - vt_0)^2}{(c^2 - v^2)^2} \\ &= \frac{c^2(x_0 - vt_0)^2}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{(x_0 - vt_0)^2}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

になる.

$$ct' = |OE| = |DF|, \quad x' = |OF| = |DE| \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} |OF|^2 &= (x'i)(-x'i) \\ &= x'^2 \end{aligned} \tag{5.18}$$
$$x'^2 = \frac{(x_0 - vt_0)^2}{1 - v^2/c^2} \quad (5.19)$$
$$(1 - v^2/c^2) > 0 \quad (5.20)$$
$$x_0 - vt_0 \geq 0 \quad (5.21)$$
$$x' = \frac{x_0 - vt_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

と同じである。以上のように、新複素平面における世界線の交点の座標からローレンツ変換の x' の式を求めることができた。

以上の証明では、光の放出も新複素数の座標変換の式も使わず、以下の方法でローレンツ変換を求めた。

- 1) 時間を距離に変える係数を c として時間は ct で計算する。
- 2) 静止している観測者 A の座標を直交座標にして、運動している観測者 B の世界線を斜交座標の時間軸にする。斜交座標の距離軸の方程式は時間軸の方程式で ct を x に x を ct に置き換えて求める。
- 3) 観測される静止点 D から斜交座標軸に平行に引いた直線と各斜交座標軸との交点 E, F の座標を世界線の方程式から計算する。
- 4) 交点 E, F の座標が (ct, x) のとき、その点の新複素数は $cth + xi$ なので

$$\sqrt{(cth + xi)(cth - xi)}$$

で世界距離を計算する。

- 5) 斜交座標軸上の点 E, F の原点 O からの距離が斜交座標から見た静止点の座標 (ct', x') になる。

この結果から、新複素数と新複素平面だけでローレンツ変換を求めることができることがわかる。これに反して、ミンコフスキー時空図では世界線の方程式の交点の座標からローレンツ変換を求めることはできない。

5.2 新複素数を使った直線の方程式

ここに一つの疑問がある。それは、新複素平面は二つの虚数軸からなる平面であるのに実数の方程式で計算ができるのはなぜかということである。そこで、新複素平面上の直線の方程式を実数で書いてもよいことを証明する。

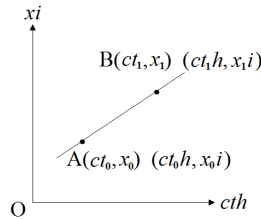


図 5.3

図 5.3 のように新複素平面上に 2 点 A, B があり、それぞれの座標を $A(ct_0, x_0), B(ct_1, x_1)$ とする。2 点 A, B を通る直線を実数で計算すると、傾きは

$$\frac{x_1 - x_0}{ct_1 - ct_0}$$

であり, 点 $A(ct_0, x_0)$ を通るので, 直線の方程式は

$$\begin{aligned} x - x_0 &= \frac{x_1 - x_0}{ct_1 - ct_0}(ct - ct_0) \\ x &= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

である.

次に, 新複素数で直線の方程式を計算する. 点 A, B をそれぞれ $A(ct_0h, x_0i), B(ct_1h, x_1i)$ と表示すると, 傾きは

$$\frac{x_1i - x_0i}{ct_1h - ct_0h}$$

であり, 点 $A(ct_0h, x_0i)$ を通るので直線の方程式は

$$\begin{aligned} xi - x_0i &= \frac{x_1i - x_0i}{ct_1h - ct_0h}(ct_1h - ct_0h) \\ (x - x_0)i &= \frac{(x_1 - x_0)i}{(t_1 - t_0)ch}(t - t_0)ch \\ x - x_0 &= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) \\ x &= \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + x_0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

になる. (5.23) は (5.22) と同じである. つまり, 新複素数で直線の方程式を計算しても, 実数で求めた直線の方程式と同じになるので, 新複素平面の直線を実数の方程式で計算することができる.

5.3 新複素数を使った座標成分の表し方

複素数 $a + bi$ を複素平面に書くとき, その座標成分を実数の組み合わせ (a, b) で表す方法を考えついたのはハミルトンである. 複素平面では 1 個の実数と 1 個の虚数しか存在しないので, 座標軸を見れば a, b が実数成分を表すのか虚数成分を表すのかは簡単にわかる. しかし, 「11. 4 次元時空の 2 重構造」で証明されるが, 4 次元時空には 4 種類の実数と 4 種類の虚数が存在する. その場合, (ct, x, y, z) の 4 個の実数がどの実数や虚数を表すのかを座標軸を見て考えなければならない. この不便さをなくすために, 今後は $(, , ,)$ 内に実数や虚数をそのまま記入することにする. この表記法に変えても矛盾が生じないことは, 前の単元で説明したように点 $A(ct_0, x_0)$ の座標を $A(ct_0h, x_0i)$ と書いて計算してもよいことからわかる.

第 1 章から第 5 章を読まずに, いきなり第 6 章から読み始めた読者は, $(, ,)$ 内に虚数があるので表記法が間違っていると考えられるかもしれないが, 上に説明した理由により第 6 章からは $(, ,)$ 内に虚数を記入している. $(, ,)$ 内に虚数を記入したほうが理解しやすいので第 1 章から新しい表記法を使いたかったが, 新四元数の説明が終わっていなかったため, 第 5 章まではハミルトンの表記法を使った.

5.4 虚数 h の正当性

「3.4 第4の虚数 h 」で説明したように、ユークリッド時空中における相対性理論の式を非ユークリッド時空中における相対性理論の式であるローレンツ変換に一致させるために、ハミルトンの i, j, k の三つの虚数に加えて、第4の虚数 h を導入した。この h を使うことで数学的に矛盾なく非ユークリッド時空の計算ができるので、虚数 h はこの曲がった4次元時空の性質そのものを表していると考えるのが妥当である。

我々が日頃使う数学や物理学は曲がりがないユークリッド時空の現象を説明している。その数学や物理学を曲がった非ユークリッド時空に当てはめるためにテンソルが使われているが、記号が複雑なので使いこなすことが困難である。しかし、「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」や「5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法」で示したように、時間成分に h を掛け、空間成分に i, j, k を掛ければ、今までどおりの計算法で非ユークリッド時空の数学や物理学を作ることができる。その理由として、新四元数自体が曲がりの要素を含んでいるので、これを曲がった時空に適用すれば曲がりが消えて直線や平面になってしまうことが考えられる。そこで、新四元数を使って正確に4次元時空の物理現象を説明できる可能性がある。

それに対して、虚数 h, i, j, k を使わない数学や物理学、天文学は、我々が住むこの曲がった非ユークリッド時空を曲りがないユークリッド時空に戻して説明している可能性がある。また、「13.3 新八元数の定理」の「定理13」で説明するが、非ユークリッド時空では角は回転でその大きさが変わるので $\sin \theta$ や $\cos \theta$ などの三角関数は成立しない。そこで、三角関数を使って物理現象を計算することは非ユークリッド時空をユークリッド時空に戻して近似計算していることになる。

6. 時間の遅れと距離の短縮

6.1 固有時と時間の遅れ

「固有時」 τ (タウ) は、相対性理論でローレンツ変換の次に大事な概念である。そして、相対性理論の大部分の結論はローレンツ変換と固有時を使って求めることができる。松田卓也先生と二間瀬敏史先生の「なっとくする相対性理論」では、固有時を「時計に対して静止した系で測られる時間を固有時とよぶ」と説明している。観測される点 D に観測者 B が近づき一致したときの B と D の時間が固有時である。この説明では固有時の具体像がつかみにくいので、視覚的に説明するために松田卓也先生はミンコフスキー時空図を使っている。しかし、ミンコフスキー時空図では、世界線の傾きが速度の逆数なので理解しにくい。また、世界線の交点の座標から世界線の長さを計算することはできない。新複素平面では世界線の傾きは速度を表し、その長さを交点の座標から計算で求めることができるので、この単元では新複素平面を使って固有時を説明する。

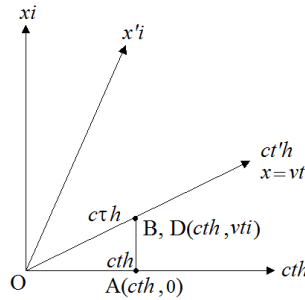


図 6.1

今までは、観測される質点 D は静止していたが、 D が観測者 B と同じように等速直線運動をしているとする。そして、図 6.1 のように観測者 B が D に近づき B と D が一致したとする。このとき、 D の速度は v になり直線 $x = vt$ は D の時間軸 $ct'h$ 軸になる。すなわち、 $ct'h$ 軸は B と D の世界線である。そして、 B と D から見て自分達の距離 x' は常に 0 だが、時間 t' は経過する。図 6.1 で $|OD|$ は $ct'h$ 軸上の点 D の原点 O からの距離なので、 $|OD|$ が D の固有時 τ である。つまり

$$|OD| = c\tau h$$

である。この式で、 $|OD|$ についている h を外すことができない理由を説明する。共役新複素数 $\overline{D} = c\tau h$ と絶対値の定義 $|A| = A\overline{A}$ から

$$\begin{aligned} |OD|^2 &= D\overline{D} \\ &= (c\tau h)^2 \\ &= -c^2\tau^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

である。 $-c^2\tau^2 < 0$ なので、「 $\sqrt{\quad}$ の中が負のときは、負の原因となっている $c^2\tau^2h^2$ を $\sqrt{\quad}$ から出す」という原則を適用すると

$$\begin{aligned} |OD| &= \sqrt{-c^2\tau^2} \\ &= c\tau h \end{aligned}$$

である。上に述べた原則は「**13.2 新八元数の公理**」で「**公理 9**」にした。

この結果からわかるように、非ユークリッド時空では時間の絶対値は虚数であり、その 2 乗は負である。ユークリッド時空では、ある数 A の絶対値 $|A|$ は正の実数であるが、非ユークリッド時空では $|A|$ は正の実数か正の虚数になる。このことは、「**13.3 新八元数の定理**」の「**定理 7**」で証明する。また、数学的計算から、我々は時間成分も空間成分も虚数の世界に住んでいることを「**11.4 2 重構造を持つ 4 次元時空**」で証明する。

次に、静止している観測者 A の時間 t と運動している質点 D の固有時 τ の関係を求める。図 6.1 で静止系の A から見た点 D の座標は (cth, vti) であり新複素数は $D = cth + vti$ なので

$$\begin{aligned} |OD|^2 &= D\overline{D} \\ &= (cth + vti)(cth - vti) \\ &= (cth)^2 - (vti)^2 \\ &= -c^2t^2 + v^2t^2 \\ &= -c^2t^2(1 - v^2/c^2) \end{aligned} \tag{6.2}$$

である。そして、(6.1) と (6.2) から

$$\begin{aligned} -c^2\tau^2 &= -c^2t^2(1 - v^2/c^2) \\ \tau^2 &= t^2(1 - v^2/c^2) \end{aligned}$$

になる。 $c > v$, $t > 0$, $\tau > 0$ の条件で

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{6.3}$$

である。(6.3) で $1 > \sqrt{1 - v^2/c^2}$ なので $\tau < t$ になり、運動する質点 D の時間 τ は静止している観測者 A の時間 t よりも遅れることを示している。これが、有名な相対性

理論の運動する時計の遅れの理論である。また、(6.1) のように我々の世界の時間は虚数なので (6.3) は

$$\tau h = th\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

と書くのが正しいのであるが、観測されるのは実数成分なので (6.3) のように書いた。

図 6.1 では $|OD| > |OA|$ つまり、 $\tau > t$ に見えるのに (6.3) では $\tau < t$ になっている。このことを不思議に思う人がいるかもしれないが、新複素平面は曲がった非ユークリッド平面なので、座標軸に平行な線分が一番長く、傾くにつれて短くなる。そして、 cth 軸と xi 軸の両方から一番傾いた直線は光であり、その原点からの距離は 0 になる。このことは「**8.2 新四元数による光の世界距離の証明**」と「**13.3 新八元数の定理**」の「**定理 20**」で説明する。

相対性理論では質点の固有時 τ を絶対的なものと考え、(6.3) を変形して

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.4)$$

で観測者 A の時間 t を表す。(6.4) で v が変われば t も変わるが τ は不変である。運動する質点 D は一つであるが観測者 A は v の値により多数存在する。つまり、不変な時間は τ だけなので質点の固有時とよぶのである。今後は運動する質点を中心に物理現象を考え、固有時と同じように、質点と一緒に運動する観測者が測定する質点と質点の距離を「固有長さ」、質点の質量を「固有質量 (静止質量)」とよぶ。

相対性理論では 4 次元時空の中を移動する点の軌跡を「世界線」といい、世界線の長さを「世界距離 (4 次元距離)」という。 $|OD|$ は質点 D の世界距離 s なので $s = c\tau h$ である。「**7. 新四元数と世界距離**」で説明するが、世界距離はローレンツ変換で不変なので、固有時もローレンツ変換で不変である。これは、砂川重信先生が「相対性理論の考え方」で書いている「ローレンツ変換に対して不変な時間係数を固有時とすると、世界線の長さが固有時である」の言い換えである。

6.2 相対性理論と距離の短縮

相対性理論では速度 v で運動する棒の長さは短くなる。このことを新複素数で証明する前に相対性理論の証明を説明する。これは、相対性理論の本に書いてある証明である。

次のページの図 6.2 のように、長さ l の棒 D が x 軸方向に等速直線運動をしている場合を考える。静止した観測者 A から見た棒の両端の 2 次元時空の座標を、それぞれ、 (ct_1, x_1) , (ct_2, x_2) とし、等速度 v で運動する観測者 B から見た棒の両端の 2 次元時空の座標を、それぞれ (ct'_1, x'_1) , (ct'_2, x'_2) とする。

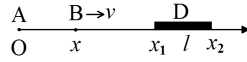


図 6.2

ローレンツ変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

から

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.5)$$

$$x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.6)$$

である. (6.6) から (6.5) を引くと

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.7)$$

になる. 観測者 A から見て棒の両端の時間は同じなので $t_1 = t_2$ である. そこで, (6.7) は

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (6.8)$$

になる.

固有時と同じように, B と D の速度が同じになったときに B が測定した棒の長さを固有長さ l_0 とよぶので $x'_2 - x'_1$ は固有長さ l_0 である. また, A が測定する棒の長さ $x_2 - x_1$ は観測者によって変化する棒の長さ l である. よって, (6.8) から

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 式を変形して

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (6.9)$$

になる. $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ なので (6.9) から $l < l_0$ である. つまり, A の手元にあった長さ l_0 の静止した棒が手から離れて速度 v になったとき, その長さ l は A から見て短くなっている. また, 棒 D と一緒に運動する B が測定する固有長さ l_0 は変化しない.

6.3 世界線の交点の座標と距離の短縮

次に、世界線の交点の座標から相対性理論の結論が求められることを示すために、世界線の長さを使って (6.9) を求める。そのためには固有時を計算した方法を距離に当てはめればよいように考えられるが、固有長さを求める方法は少し複雑である。新複素平面図は図 6.3 のようになる。

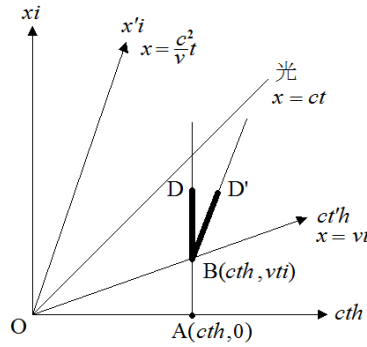


図 6.3

棒の手元の位置と観測者 B の位置が一致し、棒の先端を点 D とする。 B が棒に近づき B と棒が一致した場合なので、 B と棒の速度は v になる。そして、直線 $x = vt$ は B と棒の時間軸 $ct'h$ 軸になり、直線 $x = vt$ の光に対して線対称な直線

$$x = \frac{c^2}{v}t$$

が $x'i$ 軸になる。光に対して線対称な直線の方程式は「4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法」で説明したように、 $x = vt$ で x を ct に ct を x に置き換えれば求められる。

図 6.3 で棒の傾きが問題になる。棒の両端は B から見て同じ時刻 t' とすると新複素平面で棒の傾きは $x'i$ 軸に平行になる。つまり、棒の先端 D' は新複素平面で傾いている。この場合、棒の長さを観測する A から見ると棒の両端の時刻が異なるので、 A は棒の長さを測定することができない。そこで、 A から見て棒の両端は同じ時刻 t でなければならないので、新複素平面では棒の先端 D は手元の B と同じ時刻 t の線上にある。つまり、棒は垂直になる。静止した観測者 A から見て棒の両端の B と D の時刻が同じでなければならないと考える点が大切である。

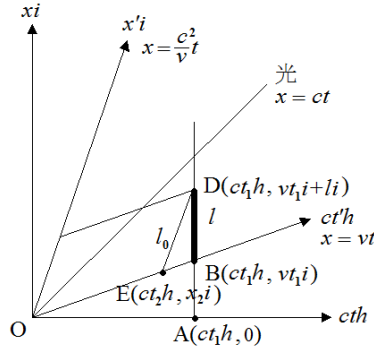


図 6.4

図 6.4 で、点 D から $x'i$ 軸に平行に引いた直線と $ct'h$ 軸の交点を E とする。このとき、 $|DE|$ が B から見た棒の固有長さ l_0 である。なぜなら、 B から見て D と E の時間が同じだからである。また、 $|BD|$ が A から見た棒の長さ l である。点 A の座標を $(ct_1h, 0)$ とすると点 B は $x = vt$ 上の点なので座標は (ct_1h, vt_1i) であり、点 D は点 B より xi 軸方向に l だけ上方向にあるので、その座標は $(ct_1h, vt_1i + li)$ である。直線 DE は $x'i$ 軸、つまり、直線 $x = (c/v)ct$ に平行で点 $D(ct_1h, vt_1i + li)$ を通るので、その方程式は

$$x - (vt_1 + l) = \frac{c}{v}(ct - ct_1) \quad (6.10)$$

になる。「5.2 新複素数を使った直線の方程式」で説明したように新複素数と実数のどちらを使っても方程式は同じになるので、ここでは、点 $D(ct_1h, vt_1i + li)$ の実数成分 $(ct_1, vt_1 + l)$ を使った。

点 E の座標は直線 DE と直線 $x = vt$ の交点の座標なので、(6.10) に $x = vt$ を代入して

$$\begin{aligned} vt - (vt_1 + l) &= \frac{c}{v}(ct - ct_1) \\ (c^2/v - v)t &= (c^2/v - v)t_1 - l \\ t &= t_1 - l/(c^2/v - v) \\ &= t_1 - lv/(c^2 - v^2) \end{aligned} \quad (6.11)$$

になる。(6.11) を $x = vt$ に代入して

$$x = vt_1 - lv^2/(c^2 - v^2) \quad (6.12)$$

である。点 E の座標を (ct_2h, x_2i) とすると (6.11) と (6.12) から

$$ct_2 = ct_1 - clv/(c^2 - v^2) \quad (6.13)$$

$$x_2 = vt_1 - lv^2/(c^2 - v^2) \quad (6.14)$$

になる. 線分 DE を表す新複素数を (DE) と書くと, $D(ct_1h, vt_1i + li)$ と (6.13), (6.14) から

$$\begin{aligned}
(DE) &= D - E \\
&= [ct_1h + (vt_1 + l)i] \\
&\quad - \{ [ct_1 - clv/(c^2 - v^2)] h + [vt_1 - lv^2/(c^2 - v^2)] i \} \\
&= clvh/(c^2 - v^2) + [l + lv^2/(c^2 - v^2)] i
\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
|DE|^2 &= \{ clvh/(c^2 - v^2) + [l + lv^2/(c^2 - v^2)] i \} \\
&\quad \times \{ clvh/(c^2 - v^2) - [l + lv^2/(c^2 - v^2)] i \} \\
&= c^2 l^2 v^2 h^2 / (c^2 - v^2)^2 - [l + lv^2/(c^2 - v^2)]^2 i^2 \\
&= -c^2 l^2 v^2 / (c^2 - v^2)^2 + [l + lv^2/(c^2 - v^2)]^2 \\
&= \frac{-c^2 l^2 v^2 + l^2 (c^2 - v^2)^2 + 2l^2 v^2 (c^2 - v^2) + l^2 v^4}{(c^2 - v^2)^2} \\
&= \frac{l^2 (-c^2 v^2 + c^4 - 2c^2 v^2 + v^4 + 2c^2 v^2 - 2v^4 + v^4)}{(c^2 - v^2)^2} \\
&= \frac{l^2 (-c^2 v^2 + c^4)}{(c^2 - v^2)^2} \\
&= \frac{l^2 c^2 (c^2 - v^2)}{(c^2 - v^2)^2} \\
&= \frac{l^2 c^2}{c^2 - v^2} \\
&= \frac{l^2}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

である. B から見た線分 DE を表す新複素数を $(DE)_B$ とすると

$$(DE)_B = l_0 i \tag{6.16}$$

なので

$$\begin{aligned}
|DE|^2 &= (DE)_B \overline{(DE)_B} \\
&= l_0 i (-l_0 i) \\
&= l_0^2
\end{aligned} \tag{6.17}$$

になる. $l_0 > 0$, $l > 0$ と (6.15), (6.17) から

$$l_0^2 = \frac{l^2}{1 - v^2/c^2}$$

$$\begin{aligned}
 l_0 &= \frac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 l &= l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}
 \end{aligned}
 \tag{6.18}$$

である. (6.18) は相対性理論で求めた式

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{6.9}$$

と同じでなので, 新複素平面を使って相対性理論の距離の短縮の式を証明できることがわかった.

また, (6.18) で l と l_0 は実数であるが, (6.16) が示すように我々は距離が虚数の世界に住んでいる. 本当の距離は li と l_0i であるが l と l_0 を観測しているのである. このことは「**11.4 2 重構造を持つ 4 次元時空**」で説明する.

7. 新四元数と世界距離

7.1 相対性理論の世界距離の定義

相対性理論では、世界線の長さを世界距離という。この章では世界距離を新四元数を使って求めるが、その前にこの単元で、相対性理論の本に載っている世界距離の導き方を説明する。

時刻 0 に原点 O から放出された光は、時刻 t には半径 ct の球面を形成し、その方程式は $x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$ である。変形すると $(ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$ になる。相対性理論では、ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

を代入しても

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (7.1)$$

の値が変化しないので、(7.1) の s を世界距離と定義した。

実際に計算してみる。ローレンツ変換 (3.3), (3.4) と

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

を $(ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ に代入して

$$\begin{aligned} (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 &= c^2 \left[\frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 - \left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 - y^2 - z^2 \\ &= \frac{c^2 t^2 - 2c^2 t(v/c^2)x + c^2 v^2 x^2 / c^4 - x^2 + 2vtx - v^2 t^2}{1 - v^2/c^2} - y^2 - z^2 \\ &= \frac{c^2 t^2 - 2vtx + v^2 x^2 / c^2 - x^2 + 2vtx - v^2 t^2}{1 - v^2/c^2} - y^2 - z^2 \\ &= \frac{c^2 t^2 + v^2 x^2 / c^2 - x^2 - v^2 t^2}{1 - v^2/c^2} - y^2 - z^2 \\ &= \frac{c^2 t^2 (1 - v^2/c^2) - x^2 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} - y^2 - z^2 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned}$$

になる. つまり, $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ はローレンツ変換を行っても不変である.
また

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (7.2)$$

のように, $(ct)^2$ と $x^2 + y^2 + z^2$ の符号を逆にしてもローレンツ不変であるが, 質点の速度 $v(v_x, v_y, v_z)$ は光速を超えないので

$$x^2 + y^2 + z^2 = v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2 + v_z^2 t^2 = (vt)^2 < (ct)^2$$

から (7.2) では s^2 が負になる. そこで, 一般的には

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (7.1)$$

を世界距離 s と定義している.

7.2 新四元数による世界距離の導出

相対性理論で世界距離を定義する理論には一つの欠点がある. それは, ローレンツ変換で不変な量を探して世界距離 s を定義しているのに, 他の定義が可能かどうかは不明であることである. ローレンツ不変性を満たす複数の世界距離の定義のうちの1つを選んだだけかもしれない. また, (7.1) と (7.2) のどちらが正しいのかさえ数学的に証明されていない. そこで, 新四元数だけを使って数学的に世界距離を計算し, 世界距離の唯一の定義を導き出す.

「1.2 複素数の定義と公式」で説明したように, ユークリッド平面の複素数 $A = a + bi$ の絶対値の2乗は

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - abi + bai - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

である. 同じ計算を新複素数 $A = ah + bi$ で行くと

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (ah + bi)(ah - bi) \\ &= a^2 h^2 - b^2 i^2 \\ &= -a^2 + b^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

になり, (1.1) と (7.3) を比較すると a^2 の符号が逆になる. つまり, 新複素数が表す非ユークリッド平面では, 時空が曲がっているのに (7.3) のようになる.

複素数を 4 次元に拡張したハミルトンの四元数では

$$A = a + bi + cj + dk$$

$$\overline{A} = a - bi - cj - dk$$

である。演算規則は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

なので

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\overline{A} \\ &= (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= a^2 - abi - acj - adk + bai - b^2i^2 - bcij - bdik \\ &\quad + caj - cbji - c^2j^2 - cdjk + dak - dbki - dckj - d^2k^2 \\ &= a^2 - abi - acj - adk + abi + b^2 - bck + bdj \\ &\quad + acj + bck + c^2 - cdi + adk - bdj + cdi + d^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned} \tag{7.4}$$

になる。新複素数を 4 次元に拡張した新四元数では

$$A = ah + bi + cj + dk$$

$$\overline{A} = ah - bi - cj - dk$$

である。演算規則はハミルトンの四元数の演算規則に

$$h^2 = -1, \quad hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

を加えるので

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\overline{A} \\ &= (ah + bi + cj + dk)(ah - bi - cj - dk) \\ &= a^2h^2 - abhi - achj - adhk + baih - b^2i^2 - bcij - bdik \\ &\quad + caji - cbji - c^2j^2 - cdjk + dakh - dbki - dckj - d^2k^2 \\ &= -a^2 - abhi - achj - adhk + abhi + b^2 - bck + bdj \\ &\quad + achj + bck + c^2 - cdi + adhk - bdj + cdi + d^2 \\ &= -a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \end{aligned}$$

になる。つまり

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= A\bar{A} \\
 &= (ah + bi + cj + dk)(ah - bi - cj - dk) \\
 &= -a^2 + b^2 + c^2 + d^2
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

である。(7.4) と (7.5) を比較すると, (1.1) と (7.3) の場合と同じように a^2 の符号が逆になる。これは, 新四元数が表す 4 次元時空は非ユークリッド時空であることを示している。

4 次元時空では, 時刻 0 に原点 O にあった質点の時刻 t の位置を表す新四元数は $A = cth + xi + yj + zk$ である。これを (7.5) に当てはめると

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= A\bar{A} \\
 &= (cth + xi + yj + zk)(cth - xi - yj - zk) \\
 &= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2
 \end{aligned}$$

になる。 $|A|$ は世界距離 s , すなわち, 原点 O から点 A までの距離を表すので

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{7.6}$$

になる。(7.6) が数学的に計算した世界距離の式である。4 次元時空の距離を数学だけで求めたので, 他の数式が世界距離を表す可能性はない。前の単元で

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{7.1}$$

が相対性理論における世界距離の一般的定義であると述べたが, (7.6) が数学的に正しい定義である。そして, (7.1) と違って s^2 は負になる。恒岡美和先生の「明解 相対性理論入門」では (7.6) を世界距離の定義にしており, 相対性理論の本では (7.1) と (7.6) のどちらを選ぶかの明確な根拠はない。

7.3 世界距離の 2 乗が負であることの解釈

s^2 が負であるときに s がどうなるかは新四元数で考えると理解できる。(7.6) を求める計算の途中で h, i, j, k を含む式は

$$s^2 = (cth)^2 - (xi)^2 - (yj)^2 - (zk)^2 \tag{7.7}$$

である。(7.7) から s を求めると, $(ct)^2 > x^2 + y^2 + z^2$ のとき

$$\begin{aligned}
 s &= cth\sqrt{1 - \frac{(xi)^2 + (yj)^2 + (zk)^2}{(cth)^2}} \\
 &= cth\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(ct)^2}}
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

になる。(7.8)で ct に h が掛けてあることは世界距離 s が時間成分であることと、4次元時空でも世界距離は虚数であることを示している。

次に、固有時を使って s が時間成分であることを確認する。(7.7)の座標 (cth, xi, yj, zk) は静止している観測者 A から見た質点 D の座標である。運動する観測者 B から見た D の座標は $(ct'h, x'i, y'j, z'k)$ であり、 s^2 はどの座標から見ても不変なので

$$s^2 = (ct'h)^2 - (x'i)^2 - (y'j)^2 - (z'k)^2$$

である。よって

$$s = ct'h \sqrt{1 - \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{(ct')^2}} \quad (7.9)$$

になる。 B と D が一致した時の時間 t' が D の固有時 τ なので、(7.9)で $x' = y' = z' = 0$ とすると

$$s = c\tau h \quad (7.10)$$

である。(7.10)から、世界距離 s は固有時 τ の c 倍であり虚数であることがわかる。

7.4 最小2乗の法則

「7.1 相対性理論の世界距離の定義」で説明したように、相対性理論の世界距離の定義 $s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$ は正になる。そして、 $x^2 + y^2 + z^2$ が最小のときに s^2 が最大になるので、「2点間を結ぶ世界線が直線のときに世界距離 s^2 が最大になる」と説明している。2次元平面や3次元空間では「2点間の距離の2乗は直線のときに最小になる」ので、直線のときに s^2 が最大になることは世界距離だけの特異な性質であると説明されている。

しかし、新四元数を使って数学的に求めた世界距離の定義は $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ である。この式では s^2 は負なので、 $x^2 + y^2 + z^2$ が最小のときに s^2 も最小になる。「2点間の距離の2乗は直線のときに最小になる」という最小2乗の法則が2次元平面や3次元空間と同じように4次元時空でも成り立つ。このことは、新四元数による世界距離の定義 $s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$ の正しさを示している。

また、相対性理論では s^2 は正なので世界距離 s は実数であるが、新四元数を使った時空理論では s^2 は負なので世界距離 s は虚数である。この違いから、相対性理論では4本の実数座標軸の世界に我々は住んでいると考え、新四元数を使った時空理論では、我々は4本の虚数座標軸の世界に住んでいることになる。我々の世界と重なって存在する、もう一つの世界が実数座標軸の世界である。このことは「11. 4次元時空の2重構造」で説明する。

8. 新四元数と光の世界距離

8.1 相対性理論による光の世界距離の証明

相対性理論によれば光の世界距離は0である。つまり、光は4次元時空をどこまで進んでも原点からの距離は0である。このことは大変不思議に思えるが、新複素平面を使えば視覚的に理解できる。

新複素平面による証明の前に、相対性理論の世界距離の定義から光の世界距離が0であることを示す。これは相対性理論の教科書に載っている証明法である。

時刻0に原点 O を出発し、等速度 $v(v_x, v_y, v_z)$ で直線運動をする質点の世界距離を s とすると、相対性理論の世界距離の定義

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (7.1)$$

から

$$\begin{aligned} s^2 &= (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \\ &= (ct)^2 - v_x^2 t^2 - v_y^2 t^2 - v_z^2 t^2 \\ &= (ct)^2 - (vt)^2 \end{aligned} \quad (8.1)$$

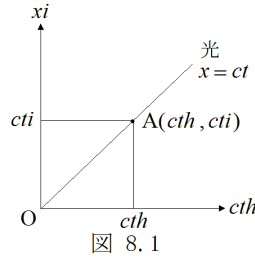
になる。光は速度 $v = c$ なので光の世界距離 s は (8.1) から

$$\begin{aligned} s^2 &= (ct)^2 - (ct)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。つまり、光はどこまで進んでも、その世界距離は0である。不思議な結果であるが、新四元数と新複素平面を使うと容易に理解できる。

8.2 新四元数による光の世界距離の証明

4次元時空で時刻0に原点 O から x 軸方向に放出された光の世界線の方程式は $x = ct$ なので、その座標は $(cth, xi, 0, 0)$ に $x = ct$ を代入して $(cth, cti, 0, 0)$ になる。また、新4元数は $A = cth + cti$ である。 $y = z = 0$ なので2次元時空で考えると、図8.1のように光の世界線は新複素平面の cth 軸と xi 軸から等距離の直線になる。ここで角45度という言葉を使わない理由は、非ユークリッド平面では、2直線が作る角度は回転すると変化するので角度という言葉が意味を持たないからである。このことは「13.3 新八元数の定理」の「定理10」で証明する。



さて, $|A|$ は光の世界距離 s を意味するので

$$\begin{aligned}
 s^2 &= |A|^2 \\
 &= A\bar{A} \\
 &= (cth + cti)(cth - cti) \\
 &= (cth)^2 - (cti)^2 \\
 &= -(ct)^2 + (ct)^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

つまり, 新複素平面では, 2つの座標軸から等距離にある点の原点 O からの距離は0である. このことは新複素平面が我々の常識を超えた非ユークリッド平面であること示している. また, 新複素数や新四元数は非ユークリッド時空を記述する数学であることを示している.

曲がった非ユークリッド平面を平らな紙に書き, その紙の上の世界線の距離を計算で求めることはできないと考えられているが, 新複素数を使えばユークリッド平面と同じように計算できる. このことは「5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法」と「6.3 世界線の交点の座標と距離の短縮」で証明した. 同じことは新四元数にも当てはまり, 新四元数を使えば曲がった非ユークリッド4次元時空における世界線の方程式から交点や距離を計算で求めることができるだろう.

相対性理論には特殊相対性理論と一般相対性理論がある. 観測者が静止しているか等速直線運動をしているときの理論が特殊相対性理論であり, 観測者が加速度運動をしているときの理論が一般相対性理論である. そして, 特殊相対性理論では時空は曲がりが無いユークリッド時空と考え, 一般相対性理論で時空は曲がった非ユークリッド時空と考える.

しかし, 今まで証明してきたように, 等速直線運動の段階で既に時空は曲がっており, 加速度運動による曲がりも加えるとき時空は2重に曲がっていることになる. これがアインシュタインの相対性理論と新四元数による時空理論の違いである.

8.3 光の世界距離が0であることの解釈と光速不変の原理

図 8.1 でわかるように、2 次元時空では、「光の世界線は二つの座標軸から等距離にある」ということができるが、逆の見方もできる。すなわち、「二つの座標軸から等距離にある世界線を光とよぶ」と定義することもできる。先の見方では光は絶対的な物として存在し、その性質を述べているが、後の見方では、「沢山の世界線の中で二つの座標軸から等距離にある世界線を光とよぶ」と言っている。この見方では、物質を構成する質点の世界線と光の世界線は元々同じ性質を持ち、座標軸から等距離にある世界線を光とよび、等距離でない世界線を物質とよんでいるに過ぎないことになる。この理論を 4 次元時空に拡張すると、光は 2 次元時空のように各座標軸から等距離にあるわけではなく、世界距離

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (7.6)$$

が 0 である場所だけを通過する。つまり、4 次元時空でも物質と光の違いは通過場所の違いだけであることになる。我々が住む 3 次元空間で光をどの方向にでも放射することができる理由は、(7.6) で $s = 0$ を満たす点 (ct, x, y, z) は無数に存在することである。

古典物理学では、光は波と粒子の両方の性質を持っている。一方、量子力学では、物質は本来波として存在し、観測により粒子になる。物質が波であることは不思議に思えるが、「物質と光の違いは 4 次元時空の通過場所の違いだけである」と考えれば、不思議ではない。元々同じものだから、光も物質も波と粒子の両方の性質を持つと考えることができる。この本では「物質と光の違いは 4 次元時空の通過場所の違いだけである」を公理にして議論を進める。公理とは、正しいと考えられるが現時点では証明できない法則のことである。公理については、「13.1 公理と定理の必要性」で説明する。

さらに考えを進めて、「時間 t を距離に変換する係数を c とすると時間は ct で表される。このとき、時間軸と距離軸から等距離にある世界線の方程式は $x = ct$ なので、その速度は c になる。この世界線を光とよぶ」ということもできる。この理論では、 c は時間を距離に変換する係数であるに過ぎなくなる。光はその通過場所が二つの座標軸から等距離なので速度 c を持つことになる。そのときには、「光速不変の原理」は証明することができない原理や公理ではなく、新四元数から導かれる定理にすぎなくなる。

4 次元時空には 4 本の座標軸と世界線しか存在せず、その通過場所により世界線が光になったり物質になったりすると考えれば、観測できるものだけで自然現象を考えるとときに発生する間違いを避けることができる。物質で自然現象を考える習慣から、相対性理論では質量がエネルギーになることは説明しても、質量そのものについては説明していない。また、質量が空間を曲げて重力を生み出すという説明は、質量が空間とは独立した存在であることを前提にしている。つまり、質量は「絶対質量」として存在し、何かの影であるかもしれないとは考えられていない。四次元時空には 4 本の

座標軸と世界線しか存在せず、質量もエネルギーも運動量も世界線から定義できることを、「**18. 新八元数と質量**」で証明する.

9. 双子のパラドックス

9.1 双子のパラドックスの内容

この本は相対性理論の解説書ではなく、新複素数、新四元数、新八元数で物理法則を証明する本なので相対性理論のパラドックスに興味はない。しかし、有名な双子のパラドックスを新複素数を使って計算すると、世界線と力の関係をよく理解できるので、以下に証明する。

まず、双子のパラドックスの内容を説明する。双子の A と B がいたとする。 A は静止し、 B はロケットで A から見て x 軸の正方向に等速度 v で出発したとする。途中で急減速急加速をして A の方向に反転し $-v$ の速度で戻って来たとする。出発のときに A と B の時計を時刻 0 に合わせておき、到着時の A と B の時計の時刻が t と t' であったとする。このとき、運動する時計の時間延長の公式

$$\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (6.3)$$

から、 $t' = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ になる。 $1 - v^2/c^2 < 1$ なので、 A よりも B のほうが時間の進みが遅い。

次に、この話を B の視点に変えると、 B は静止し B から見て A は x 軸の負方向に速度 $-v$ で離れて行き、途中で急減速急加速をして B の方向に反転し v の速度で戻って来たように見える。同じように A と B の時計の時刻が t と t' であったすると、 A の時計が運動したので $t = t'\sqrt{1 - v^2/c^2}$ になる。今度は逆に A のほうが若くなってしまう。

これを双子のパラドックスというのであるが、 A と B が同じ条件にあるという前提が間違っている。 A は静止しているので力は加わっていないが、 B には急減速急加速するときに力が加えられている。これに対して、 B から見て A が急減速急加速したように見えたときには A に力は加えられていない。 B は速度の変化時に力を感じるが A は急減速急加速したように見えても力を感じない。これが A と B の違いである。 A と B の距離の変化だけで考えると A と B は同じに見えるが、 B だけに力が加えられているので、 A と B は同じ条件にはない。

ローレンツ変換を使って計算する場合には力の要素を入れられないため、この違いを言葉だけで説明することが多いが、新複素平面で計算すると力の要素を加えることができる。以下にその計算を示す。

9.2 静止系の視点での計算

まず, B が A の x 軸方向に等速度 v で運動し, 途中で速度 $-v$ で引き返して来る場合を考える. 新複平面は, 図 9.1 のようになる. ただし, a は定数である.

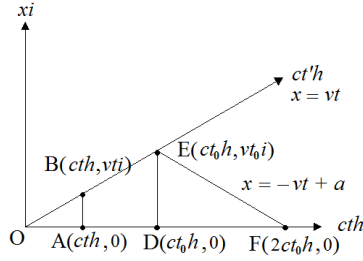


図 9.1

A は静止しているが時間は経過するので, cth 軸上を移動する. B は A から見て, 直線 $x = vt$ ($ct'h$ 軸) 上を移動し, A から見て時刻 t_0 に傾き $-v$ の直線になり, 時刻 $2t_0$ に cth 軸上で A に出会う. この交点を F とする. 時刻 t_0 の A の位置を D とすると座標は $D(ct_0h, 0)$ である. また, B の速度が v から $-v$ に代わる点を E とすると座標は $x = vt$ に t_0 を代入して $E(ct_0h, vt_0i)$ になる.

B が速度 0 から v になるまでの時間と速度 v から $-v$ に変わる時間は全行程から見ると短時間であるとして計算から除外する. 加速度を計算する場合は恒岡美和先生の「明解 相対性理論入門」に詳しく書いてある.

さて, 点 E の新複素数は $ct_0h + vt_0i$ なので距離の定義から

$$\begin{aligned} |OE|^2 &= (ct_0h + vt_0i)(ct_0h - vt_0i) \\ &= c^2t_0^2h^2 - v^2t_0^2i^2 \end{aligned} \quad (9.1)$$

である. また, 線分 EF を表す新複素数を (EF) と書くと

$$\begin{aligned} (EF) &= F - E \\ &= 2ct_0h - (ct_0h + vt_0i) \\ &= ct_0h - vt_0i \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} |EF|^2 &= (ct_0h - vt_0i)(ct_0h + vt_0i) \\ &= c^2t_0^2h^2 - v^2t_0^2i^2 \end{aligned} \quad (9.2)$$

である. (9.1), (9.2) から

$$|OE| + |EF| = 2\sqrt{c^2 t_0^2 h^2 - v^2 t_0^2 i^2}$$

になる. $\sqrt{\quad}$ の中は $c > v$ のときに

$$c^2 t_0^2 h^2 - v^2 t_0^2 i^2 = -c^2 t_0^2 + v^2 t_0^2 < 0$$

なので, 「 $\sqrt{\quad}$ の中が負になるときは, 負になる原因を $\sqrt{\quad}$ の外に出す」という原則を使い

$$|OE| + |EF| = 2ct_0h\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (9.3)$$

である. また, F の新複素数 $F = 2ct_0h$ を使うと

$$\begin{aligned} |OF|^2 &= (2ct_0h + 0i)(2ct_0h - 0i) \\ &= (2ct_0h)^2 \end{aligned}$$

なので

$$|OF| = 2ct_0h \quad (9.4)$$

である. (9.3) と (9.4) から $|OE| + |EF| < |OF|$, つまり, B の経過時間は A よりも短く B が A よりも若い. (9.4) で, $2ct_0$ に h が掛けてあることは, $|OF|$ が時間成分であることを示している. また, 図 9.1 で $|OF|$ よりも $|OE| + |EF|$ の方が長く見えるが, 新複素平面は非ユークリッド平面なので, 座標軸に平行な線分が一番長く座標軸から傾くにつれて線分の長さは短くなる.

9.3 運動系の視点での計算

次に, B が静止し A が運動していると考えた場合の新複素平面図を考える. 4次元時空における質点の軌跡である世界線は光と同じように伝わるとすると, 2点間の世界線の軌跡は直線になる. つまり, 力が加えられなければ世界線は直線となり, 力が加えられれば世界線は曲がる. 力が消えれば曲線は直線に戻り, 力が加えられ続けられ曲線のままである. 「世界線を曲げるものが力である」と定義してもよいし, 「世界線の曲がり力が力である」と定義することもできる. このことは, 「**20.3 世界線の反射と力**」で説明する. また, 慣性の法則は「質点は力が加えられなければ等速直線運動をする」であるが, 世界線で考えれば「力が加えられなければ質点の世界線は直線になる」という内容になる.

時空は曲がっているので直線のはずはないと考えるかもしれないが, 新複素数を使った新複素平面では直線になるし, その世界線の方程式が一次関数なら直線になる. 新四元数を使って4次元時空における世界線を描いても同じになると考えられる. なぜ

なら、新四元数自体が曲がりの要素を含んでおり、これを曲がった時空に適用すれば曲がりが消えて直線や平面になってしまうからである。このことは、「5.1 新複素平面上の距離からローレンツ変換を求める方法」で証明した。

双子のパラドックスを B の視点から見ると、 B は静止し B から見て A は x 軸の負方向に速度 $-v$ で離れて行き、途中で急減速急加速をして B の方向に反転し v の速度で戻って来たように見える。 B が静止しているのだから、図 9.2 のように B の世界線が cth 軸になり、 A の世界線は $x = -vt$ の直線になり時刻 t_0 に $x = vt - a$ の直線に変わり、時刻 $2t_0$ に cth 軸と交わると考えてしまう。しかし、先に述べた世界線と力の関係から、この図では B は直線なので力は加えられず、 A は途中で曲がっているので力が加えられたことになる。これは、力は B だけに加えられているという前提条件に合わない。

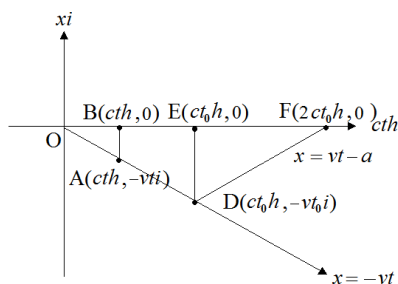


図 9.2

図だけを使って考えると間違えるので、この問題を座標変換を使って調べる。新複素数の掛け算は原点中心の回転を意味するので、 A の視点で描いた図 9.1 で点 E から点 D への移動は新複素数で表される。

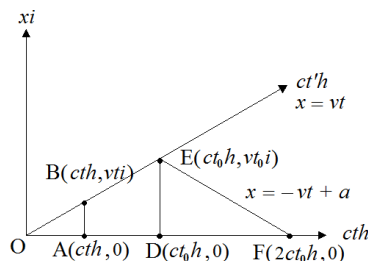
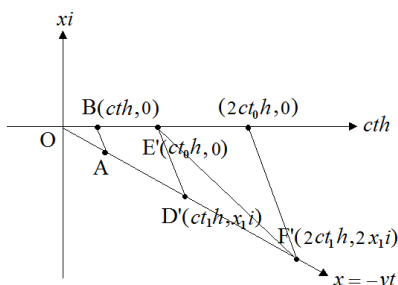


図 9.1

$$D = ct_0h, \quad E = ct_0h + vt_0i$$
$$\begin{aligned}
(ct_0h + vt_0i)H &= ct_0h \\
H &= \frac{ct_0h}{ct_0h + vt_0i} \\
&= \frac{ct_0h(ct_0h - vt_0i)}{(ct_0h + vt_0i)(ct_0h - vt_0i)} \\
&= \frac{-c^2t_0^2 - cvt_0^2hi}{-c^2t_0^2 + v^2t_0^2} \\
&= \frac{c^2 + cvhi}{c^2 - v^2} \\
&= \frac{1 + vhi/c}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{9.5}$$

座標変換で考えると B の視点から A を見るということは、回転を表す新複素数 H で E を静止座標である D の位置に移し、最初にあった D を別の位置に移すことである。 H による E と D の移動先をそれぞれ E' と D' とし交点 F の移動先を F' とすると、新複素平面は図 9.3 のようになる。



E' の座標は D の座標と同じなので $E'(ct_0h, 0)$ である。移動前の F の座標成分は D の座標成分の 2 倍なので、 H で座標変換後の F' の座標成分は D' の座標成分の 2 倍になる。つまり、 D' の座標を $D'(ct_1h, x_1i)$ とすると F' の座標は $F'(2ct_1h, 2x_1i)$ である。これは、 A には力が加えられていないので D' と F' は同じ世界線上にあるということの数学的証明である。 B の世界線は、最初は ct_h 軸であるが、時刻 t_0 の

$E'(ct_0h, 0)$ から傾いた直線になり時刻 $2t_0$ に点 F' で直線 OA と交わる. D を D' に移す計算は回転を表す新複素数 H を使って

$$DH = D'$$

なので, (9.5) と $D(ct_0h, 0)$, $D'(ct_1h, x_1i)$ から

$$\begin{aligned} ct_1h + x_1i &= ct_0hH \\ &= ct_0h\left(\frac{1 + vhi/c}{1 - v^2/c^2}\right) \\ &= \frac{ct_0h + vt_0h^2i}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{ct_0h - vt_0i}{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

になる. 係数を比較して

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - v^2/c^2} \quad (9.6)$$

$$x_1 = \frac{-vt_0}{1 - v^2/c^2} \quad (9.7)$$

である. (9.6) と (9.7) から直線 OD' の傾きを計算すると

$$\frac{x_1}{ct_1} = \frac{-vt_0}{ct_0} = -\frac{v}{c}$$

なので, 直線 OD' の方程式は

$$x = -\frac{v}{c}(ct) = -vt$$

であり, A が離れていくときの B から見た A の相対速度が $-v$ であることと一致している.

次に, 世界線の長さを計算する. (9.6) と (9.7) から

$$\begin{aligned} |OF'|^2 &= (2ct_1h + 2x_1i)(2ct_1h - 2x_1i) \\ &= 4c^2t_1^2h^2 - 4x_1^2i^2 \\ &= \frac{4c^2t_0^2h^2}{(1 - v^2/c^2)^2} - \frac{4v^2t_0^2i^2}{(1 - v^2/c^2)^2} \\ &= \frac{4c^2t_0^2h^2[1 - v^2i^2/(c^2h^2)]}{(1 - v^2/c^2)^2} \\ &= \frac{4c^2t_0^2h^2(1 - v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)^2} \\ &= \frac{4c^2t_0^2h^2}{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

である. $c > v$ なので

$$|OF'| = \frac{2ct_0h}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (9.8)$$

になる. h は世界距離 $|OF'|$ が時間成分であることを示している.

線分 $E'F'$ を表す新複素数を $(E'F')$ と書くと (9.6) と (9.7) から

$$\begin{aligned} (E'F') &= F' - E' \\ &= 2ct_1h + 2x_1i - ct_0h \\ &= \frac{2ct_0h}{1-v^2/c^2} - \frac{2vt_0i}{1-v^2/c^2} - ct_0h \\ &= \frac{2ct_0h}{1-v^2/c^2} - \frac{2vt_0i}{1-v^2/c^2} - \frac{ct_0h(1-v^2/c^2)}{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{ct_0h(2-1+v^2/c^2)}{1-v^2/c^2} - \frac{2vt_0i}{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{ct_0h(1+v^2/c^2)}{1-v^2/c^2} - \frac{2vt_0i}{1-v^2/c^2} \\ &= \frac{ct_0h(c^2+v^2)}{c^2-v^2} - \frac{2c^2vt_0i}{c^2-v^2} \end{aligned}$$

である. よって

$$\begin{aligned} |E'F'|^2 &= \left[\frac{ct_0h(c^2+v^2)}{c^2-v^2} - \frac{2c^2vt_0i}{c^2-v^2} \right] \left[\frac{ct_0h(c^2+v^2)}{c^2-v^2} + \frac{2c^2vt_0i}{c^2-v^2} \right] \\ &= \frac{c^2t_0^2h^2(c^2+v^2)^2 - 4c^4v^2t_0^2i^2}{(c^2-v^2)^2} \\ &= \frac{c^2t_0^2h^2}{(c^2-v^2)^2} [(c^2+v^2)^2 - 4c^2v^2] \\ &= \frac{c^2t_0^2h^2(c^2-v^2)^2}{(c^2-v^2)^2} \\ &= c^2t_0^2h^2 \end{aligned}$$

なので

$$|E'F'| = ct_0h \quad (9.9)$$

である. また, $E' = ct_0h$ なので

$$|OE'| = ct_0h \quad (9.10)$$

である. (9.9) と (9.10) から

$$|OE'| + |E'F'| = 2ct_0h$$

$$|OF'| = \frac{2ct_0h}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$
$$|OE'| + |E'F'| < |OF'|$$

図 9.3 では $|OE'|$ と $|E'F'|$ は同じ長さに見えないが, (9.9) と (9.10) から同じである. このことは, 新複素平面が非ユークリッド平面であることを示している. また, 新複素平面を使って計算したので, この結果を求めることができたが, ミンコフスキー時空図ではこのような計算はできない.

双子のパラドックスを B の視点から見る議論で、 B は点 E' で傾きが変わったのだから、その時点で B の新しい傾きの直線を $ct\theta$ 軸に座標変換して計算すべきではないかと考える人もいるかもしれない。しかし、そうすると、 B の世界線が出発から到着まで直線になり、逆に A の世界線は曲がってしまう。このことは、「力が加えられなければ世界線は直線となり、力が加えられれば世界線は曲がる」という原則に反する。つまり、加速度を持つ質点の曲がった世界線を直線に座標変換することはできないのである。そのことは、二次方程式を一次方程式に変換できないことから数学的に証明できる。

76

加速度運動なので世界線の方程式は曲線であり、力が作用していることも静止していないことも明らかである。等速直線運動をしている観測者の座標を慣性系といい、その世界線は直線であるので、世界線で考えるとエレベーターの自由落下運動は慣性系ではない。エレベーターの思考実験の欠点は物理現象を物で考えることであり、同じ現象を世界線で考えると間違えることはない。「世界線は力が加えられなければ四次元時空の2点間を結ぶ直線になる」という原則を忘れてはならない。この原則を「**13.2 新八元数の公理**」の「**公理 11**」に定めた。

同じ力が加えられているために同じ曲線の世界線上にいる観測者 A と B が、お互いの距離が変化しないことから自分たちは静止、もしくは等速直線運動をしていると考えるのは間違いである。2点間の距離だけで考えると静止という概念は観測者に依存する相対的なものであると思われるが、4次元時空の2点間を直線で進む場合が静止、もしくは等速直線運動になると考えると、加速度運動と等速直線運動は観測者に関係なく区別できるのである。そのことを理解するための最適の材料が双子のパラドックスである。

10. 新ローレンツ変換

10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出

新複素数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ を使ったローレンツ変換の導出は、2次元時空の新複素平面上で行った。しかし、我々は4次元時空に住んでいるので、新複素数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ が新四元数でも成り立つと仮定して、 y 軸成分と z 軸成分を含む4次元時空におけるローレンツ変換を導く。相対性理論のローレンツ変換では y 軸成分と z 軸成分は変化せず

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

であるが、新四元数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ では同じ結果にならない。

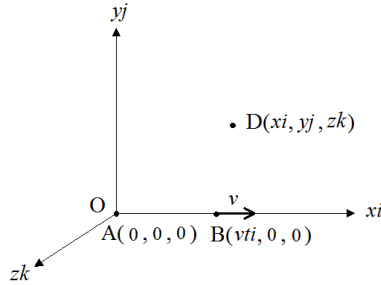


図 10.1

まず、時間が存在しない3次元空間で考える。図10.1のように、観測者 A は原点 O に静止し、観測者 B は x 軸の正方向に等速度 v で直線運動をしているとする。また、観測される点 D は3次元空間の座標 (xi, yj, zk) の位置に静止し、時刻0のときに A と B は原点 O で一致していたとする。 t 秒後には A は時刻 t , 3次元空間座標 $(0, 0, 0)$, B は時刻 t , 3次元空間座標 $(vti, 0, 0)$, D は時刻 t , 3次元空間座標 (xi, yj, zk) である。これを4次元時空の座標で記述すると、 $A(cth, 0, 0, 0)$, $B(cth, vti, 0, 0)$, $D(cth, xi, yj, zk)$ であり、新四元数は $A = cth$, $B = cth + vti$, $D = cth + xi + yj + zk$ である。これを、 cth を横軸にして、 xi, yj, zk を cth 軸と直交する座標軸とする4次元時空図で表すと図10.2のようになる。ただし、4本目の座標軸である zk 軸を平面上の透視図で書くことはできないので、破線で描いた。また、 B は直線 $x = vt$ 上にあり、 A, B, D は時刻 t が同じなので cth 軸に垂直な同一平面上にある。


$$\frac{D\overline{B}}{|\overline{B}|} \quad (10.1)$$
$$1/h = h/h^2 = -h$$

80

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{cth\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&\quad \times [(-ct + xv/c)ct + (-vt + x)cthi + (yh - zv/c)ctj + (zh + yv/c)ctk] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&\quad \times [(-ct + xv/c)/h + (-vt + x)i + (yh - zv/c)j/h + (zh + yv/c)k/h] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&\quad \times [(ct - vx/c)h + (x - vt)i + (y + vzh/c)j + (z - vyh/c)k] \tag{10.2}
\end{aligned}$$

である. B による D の座標変換後の座標を $(ct'h, x'i, y'j, z'k)$ とすると, 新四元数は $ct'h + x'i + y'j + z'k$ になり, (10.2) と係数を比較すると, h 成分は

$$ct' = \frac{ct - vx/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

になり, 両辺を c で割って

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.3}$$

になる. i, j, k 成分は, それぞれ

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.4}$$

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.5}$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{10.6}$$

である. (10.3) と (10.4) はローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3.3}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{3.4}$$

と一致しているが, (10.5) と (10.6) はローレンツ変換の

$$y' = y \tag{3.5}$$

$$z' = z \tag{3.6}$$

と一致しない. 今後, (10.3), (10.4), (10.5), (10.6) を「新ローレンツ変換」とよぶ.

10.2 新ローレンツ変換とローレンツ変換の違い

相対性理論のローレンツ変換では $y' = y$, $z' = z$ になり、座標変換で y 軸成分と z 軸成分は変化しない。その理由は、空間と時間が一様であるという等方性を仮定していることである。 x 軸の方向を右にしても左にしても

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

が求められるのは、自分から見て右の空間も左の空間も同じ性質をもっているからである。これを空間の等方性という。しかし、空間の等方性は、 x 軸方向の運動が y 軸成分と z 軸成分に影響しないという意味ではない。新ローレンツ変換の

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

で明らかのように、 x 軸方向の運動が y 軸成分と z 軸成分を変えるのである。別の言い方では、 x 軸方向の等速直線運動が y 軸方向と z 軸方向の空間を曲げるのである。これが、新四元数による座標変換から得られた新しい結論である。

相対性理論でローレンツ変換の $y' = y$, $z' = z$ を求めるときに $y' = f(v)y$ と書き、 y' を速度 v と座標 y の関数と仮定して議論している本もあるが、(10.5) と (10.6) からわかるように新四元数で計算すると、 y' と z' はどちらも y , z , v の3変数関数であり $y' = f(y, z, v)$, $z' = g(y, z, v)$ と書くことができる。相対性理論では y' が y と v の2変数関数であると仮定したことが間違いの原因である。空間の性質について仮定をせずに数学だけで計算すると、 y' は y , z , v の3変数関数である。 z' についても同様である。

ニュートン力学は、観測者の速度に関係なく時間と距離は同じであるという「絶対時間」と「絶対空間」を仮定している。この仮定を疑うことから相対性理論は生まれ、相対性理論では時間と距離は観測者の速度によって変化する。しかし、ニュートンの「絶対時間」と「絶対空間」を否定した相対性理論が、「空間の等方性」を仮定して $y' = y$, $z' = z$ という結論を出している。

(10.3), (10.4), (10.5), (10.6) は空間の性質を仮定せずに求めた式なので、空間の等方性を最初から仮定したローレンツ変換よりも時空の真の性質を表していると考えられる。ローレンツ変換に代わる新ローレンツ変換の正しさを、この変換を使って計算した世界距離が不変であることや速度の変換式で光速不変になることなどで証明する。また、(10.5) と (10.6) が虚数 h を含むことの意味は、「**12.3 新ローレンツ変換の y' と z' 成分の意味**」で説明する。また、(10.5) と (10.6) で h の前の符号が逆になっていることをおかしいと考える人がいるかもしれないが、「**10.8 新ローレンツ変換の一般式**」でその理由を説明する。

10.3 新ローレンツ変換と世界距離

新ローレンツ変換の正しさを検証するために、新ローレンツ変換で世界距離が不変になるかどうかを計算する。新四元数による世界距離の定義は「7.2 新四元数による世界距離の導出」で説明したように

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (7.6)$$

である。世界距離は座標変換で不変なので、座標変換前の座標を (ct, x, y, z) とし座標変換後の座標を (ct', x', y', z') とすると

$$-(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (10.7)$$

が成り立つ。新ローレンツ変換の式 (10.3), (10.4), (10.5), (10.6) を (10.7) の右辺に代入して左辺を求めることができるかどうかを調べる。実際に代入すると

$$\begin{aligned} & -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 \\ &= -c^2 \left[\frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 + \left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 \\ & \quad + \left[\frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 + \left[\frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 \end{aligned} \quad (10.8)$$

である。

計算が複雑になるので (10.8) の右項を半分に分けて計算する。まず、前半分は

$$\begin{aligned} & -c^2 \left[\frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 + \left[\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 \\ &= \frac{-c^2}{1 - v^2/c^2} (t^2 - 2vtx/c^2 + v^2x^2/c^4) + \frac{1}{1 - v^2/c^2} (x^2 - 2vtx + v^2t^2) \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (-c^2t^2 + 2vtx - v^2x^2/c^2 + x^2 - 2vtx + v^2t^2) \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (-c^2t^2 + v^2t^2 - v^2x^2/c^2 + x^2) \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} [-(1 - v^2/c^2)c^2t^2 + (1 - v^2/c^2)x^2] \\ &= -(ct)^2 + x^2 \end{aligned} \quad (10.9)$$

である。次に、(10.8) の後半分は

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 + \left[\frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right]^2 \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (y^2 + 2vyzh/c + v^2 z^2 h^2 / c^2 + z^2 - 2vyzh/c + v^2 y^2 h^2 / c^2) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (y^2 - v^2 y^2 / c^2 + z^2 - v^2 z^2 / c^2) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} [(1 - v^2/c^2)y^2 + (1 - v^2/c^2)z^2] \\
&= y^2 + z^2
\end{aligned} \tag{10.10}$$

である. (10.8), (10.9), (10.10) から

$$-(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

が成り立つので, 新ローレンツ変換による座標変換は世界距離を不変にする. つまり, 新ローレンツ変換の y' , z' 成分

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{10.5}$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{10.6}$$

は数学的矛盾をうまない.

10.4 ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理

次に, 新ローレンツ変換で光速不変の原理が導かれるかどうかを調べるが, その前に相対性理論のローレンツ変換で速度の式がどうなるかを説明する. この内容は相対性理論の本に載っている.

まず, 微分積分学を習っていない人のために速度の微分形式を説明する. 速度が変化しない時は, 距離 x と時間 t , 速度 v の関係は $v = x/t$ になる. しかし, 速度が変化する場合も考えると速度の一般式は

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{10.11}$$

になる. ここで dx と dt は微小の距離と微小の時間という意味である. 速度が時間とともに変化しても, ある時刻の微小の時間の間は速度が一定であると考え, 微小の距離 dx を微小の時間 dt で割って (10.11) を速度の一般式と考えたのである. d は微小を意味すると考えればよい.

ローレンツ変換の式は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

なので, 微小の量は

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.12)$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.13)$$

$$dy' = dy \quad (10.14)$$

$$dz' = dz \quad (10.15)$$

である.

質点 D の速度が, 静止している観測者 A からみて V , 等速度 v で運動している観測者 B からみて V' であるとする. V と V' の x , y , z 成分を (V_x, V_y, V_z) と (V'_x, V'_y, V'_z) とすると, (10.12) と (10.13) から

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} \end{aligned}$$

である. 右辺の分母分子を dt で割って

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{dx/dt - v}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\ &= \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \end{aligned} \quad (10.16)$$

になる. 同様に (10.12), (10.14) と (10.15) から

$$\begin{aligned} V'_y &= \frac{dy'}{dt'} \\ &= \frac{dy\sqrt{1 - v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx} \\ &= \frac{dy/dt\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\ &= \frac{V_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x} \end{aligned} \quad (10.17)$$

$$\begin{aligned}
V'_z &= \frac{dz'}{dt'} \\
&= \frac{dz\sqrt{1-v^2/c^2}}{dt - (v/c^2)dx} \\
&= \frac{dz/dt\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\
&= \frac{V_z\sqrt{1-v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x}
\end{aligned} \tag{10.18}$$

になる. (10.16), (10.17), (10.18) がローレンツ変換から導かれた速度の変換式である.

観測される対象 D が, 静止している A から x 軸方向に放出された光である場合, x 軸方向に等速度 v で運動している B から光の速度はどう観測されるかを計算する. A から見て光の速度は $V_x = c$, $V_y = 0$, $V_z = 0$ なので, これらの速度を (10.16), (10.17), (10.18) に代入して

$$\begin{aligned}
V'_x &= \frac{c - v}{1 - (v/c^2)c} \\
&= \frac{c - v}{1 - v/c} \\
&= \frac{c(c - v)}{c - v} \\
&= c
\end{aligned} \tag{10.19}$$

$$\begin{aligned}
V'_y &= \frac{0}{1 - (v/c^2)c} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.20}$$

$$\begin{aligned}
V'_z &= \frac{0}{1 - (v/c^2)c} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.21}$$

である. 観測者 B の速度 v によらず光速は常に一定の値 c であることを (10.19) は示している. これがローレン変換による光速不変の原理の証明である.

ここで「証明」という言葉を使ったが, それは間違いである. なぜなら, 「**3.1 標準的ローレンツ変換の導出法**」で説明したように, 光速不変を前提にしてローレンツ変換が導かれたのだから, ローレンツ変換で計算した速度の変換式から光速不変が導かれるのは数学的に当たり前のことである. よって, (10.19) はローレンツ変換で計算した速度の変換式が正しいことを「確認」した式であり, 光速度不変の原理の「証明」ではない. そこで, この計算から光速不変の原理が証明されたと考えてはいけない. 光速不変の原理は証明はできないが矛盾が生じないから正しいと考えられるので, 数学

の用語では公理である。しかし、この本では、「光速不変の原理」は公理ではなく他の公理から導かれる定理であることを「8.3 光の世界距離が0であることの解釈と光速不変の原理」で説明した。

10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理

同様に、新四元数による新ローレンツ変換で計算した速度の変換式から光速不変の式に到達すれば、新ローレンツ変換が正しい変換式であることが確認できる。

「10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出」で説明したように、新四元数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ を使って求めた新ローレンツ変換の式は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.4)$$

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

である。微小量は

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.21)$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.22)$$

$$dy' = \frac{dy + (v/c)dz}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.23)$$

$$dz' = \frac{dz - (v/c)dy}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.24)$$

になる。ローレンツ変換の時と同じように考えて (10.21), (10.22), (10.23), (10.24) から

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx - vdt}{dt - (v/c^2)dx} \\ &= \frac{dx/dt - v}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\ &= \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned}
V'_y &= \frac{dy'}{dt'} \\
&= \frac{dy + (v/c)dz}{dt - (v/c^2)dx} \\
&= \frac{dy/dt + (v/c) dz/dt}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\
&= \frac{V_y + (v/c)V_z}{1 - (v/c^2)V_x}
\end{aligned} \tag{10.26}$$

$$\begin{aligned}
V'_z &= \frac{dz'}{dt'} \\
&= \frac{dz - (v/c)dy}{dt - (v/c^2)dx} \\
&= \frac{dz/dt - (v/c)dy/dt}{1 - (v/c^2)dx/dt} \\
&= \frac{V_z - (v/c)V_y}{1 - (v/c^2)V_x}
\end{aligned} \tag{10.27}$$

になる。これが新ローレンツ変換による速度の変換式である。

次に、(10.25), (10.26), (10.27) を使って光速不変の原理が導かれるかどうかを調べる。観測される対象 D が静止した A から x 軸方向に放出された光の場合、 A から見た光の速度は $V_x = c$, $V_y = 0$, $V_z = 0$ なので、これらを (10.25), (10.26), (10.27) に代入して

$$\begin{aligned}
V'_x &= \frac{c - v}{1 - (v/c^2)c} \\
&= \frac{c - v}{1 - v/c} \\
&= \frac{c(c - v)}{c - v} = c \\
V'_y &= \frac{0}{1 - (v/c^2)c} = 0 \\
V'_z &= \frac{0}{1 - (v/c^2)c} = 0
\end{aligned} \tag{10.28}$$

になる。(10.28) は、観測者 B の速度 v に関係なく光速は常に一定の値 c であることを示している。以上の結果から新ローレンツ変換 (10.3), (10.4), (10.5), (10.6) から矛盾が生じないことがわかった。

10.6 虚数 h の独立性

新ローレンツ変換による速度の変換式を説明したので、虚数 h の独立性を証明する。「3.4 第4の虚数 h 」で、複素数による座標変換の式をローレンツ変換に一致させるために、 ct に虚数 h を掛けて cth で時間を計算することにした。そして、この新しい時間の単位 cth を使って座標変換を行うと

$$t' = \frac{t + (v/c^2)x}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (3.9)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \quad (3.10)$$

の c^2 の符号が (+) から (-) に変わり、ローレンツ変換を求めることができた。

このように第4の虚数 h は光速 c を ch に変えるために導入されたので、 ch の形では意味を持たないのではないかという疑問が残る。つまり、 h を単独で使うことが許されるのかどうかという疑問である。この「虚数 h の独立性」を、新ローレンツ変換による速度の変換式 (10.25), (10.26), (10.27) を使って証明する。

なお、この証明を「3.4 第4の虚数 h 」で行わなかった理由は、新ローレンツ変換による速度の変換式の説明をこの章まで待つ必要があったことである。

静止している観測者 A から横向きの y 軸方向に放射された光の速度が、速度 v で x 軸方向に運動している観測者 B からどう観測されるかを計算する。新ローレンツ変換による速度の変換式

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.25)$$

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.26)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.27)$$

に $V_x = 0$, $V_y = c$, $V_z = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{0 - v}{1 - (v/c^2)0} \\ &= -v \end{aligned} \quad (10.29)$$

$$\begin{aligned} V'_y &= \frac{c + (v/c)0h}{1 - (v/c^2)0} \\ &= c \end{aligned} \quad (10.30)$$

$$\begin{aligned} V'_z &= \frac{0 - (v/c)ch}{1 - (v/c^2)0} \\ &= -vh \end{aligned} \quad (10.31)$$

になる. (10.31) で h が c と離れて v と結合している. つまり, 虚数 h は c から独立した数である. よって, h を単独で掛けたり割ったりして問題がないと考えられる.

なお, (10.29), (10.30), (10.31) の正しさは

$$\begin{aligned}\sqrt{V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2} &= \sqrt{(-v)^2 + c^2 + (-vh)^2} \\ &= \sqrt{v^2 + c^2 - v^2} \\ &= c\end{aligned}$$

から, 光速不変の原理に一致することで証明される.

付け加えると, (10.29), (10.30), (10.31) はローレンツ変換から求められる結論とは異なっている. ローレンツ変換から導かれた速度の変換式

$$V_x' = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.16)$$

$$V_y' = \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.17)$$

$$V_z' = \frac{V_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.18)$$

に $V_x = 0$, $V_y = c$, $V_z = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned}V_x' &= -v \\ V_y' &= c\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ V_z' &= 0\end{aligned}$$

になる. この結論は (10.29), (10.30), (10.31) と違っている. しかし, この場合も

$$\begin{aligned}\sqrt{V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2} &= \sqrt{(-v)^2 + c^2 - v^2} \\ &= c\end{aligned}$$

になり, 光速不変の原理に一致する.

「10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理」で証明したように, 静止している観測者 A から光が観測者 B の進行方向に放出された時は, ローレンツ変換と新ローレンツ変換は同じ結論を導く. 静止している A から, B の進行方向に光が垂直に放出された時も, 上に述べたように, ローレンツ変換と新ローレンツ変換では, 光速度不変の原理は成り立つ. しかし, V_x' は一致するが V_y' , V_z' の値が異なっている. ローレンツ変換では横向きの光速の成分 $V_y' = c\sqrt{1 - v^2/c^2}$ は速度 v が光速 c に近づくにつれて減少するが, 新ローレンツ変換で一定値 c である. この違いについては, 「16. シンクロトロン放射」で検討する.

10.7 新ローレンツ変換と逆変換

新ローレンツ変換が数学的に矛盾しないことを、第3の方法で示す。既に2つの方法「世界距離の座標変換不変性」と「光速不変の原理」で証明したので余計なこととを感じる人がいるかもしれないが、新四元数はどこにも存在しない新しい数学なので様々の方法でその正しさを検証する必要がある。

まず、ローレンツ変換で考える。観測者 A から見て観測者 B が速度 v で運動しているということは、 B から見て A は $-v$ で運動していることになる。そこで、時間のローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

で $v \rightarrow -v$, $t' \rightarrow t$, $t \rightarrow t'$, $x \rightarrow x'$ に書き換えた式は B が静止し A が速度 $-v$ で運動しているときのローレンツ変換になる。これを逆変換という。実際に (3.3) で $v \rightarrow -v$, $t' \rightarrow t$, $t \rightarrow t'$, $x \rightarrow x'$ に書き換えると

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.32)$$

になる。この逆変換式を、下の (3.3) と (3.4) から x を消去して求めることができれば、ローレンツ変換の正しさを証明したことになる。

ローレンツ変換の t' と x' の式は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

である。(3.4) の両辺に (v/c^2) を掛けて

$$(v/c^2)x' = \frac{(v/c^2)x - (v^2/c^2)t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.33)$$

になる。(3.3) と (10.33) を辺々足すと

$$\begin{aligned} (v/c^2)x' + t' &= \frac{t - (v^2/c^2)t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= t\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

なので

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.34)$$

になる。(10.34) は (10.32) と同じである。つまり、(10.34) は逆変換の式であり、それを (3.3) と (3.4) から x を消去する方法で求めることができたことは (3.3) と (3.4) の式が数学的に矛盾しないことを示している。

同じように、新ローレンツ変換の y' と z' の式

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

から z を消去して求めた式が、(10.5) で $v \rightarrow -v$, $y' \rightarrow y$, $y \rightarrow y'$, $z \rightarrow z'$ に書き換えた変えた式と一致することを示すことができれば、(10.5) と (10.6) の式が数学的に矛盾がないこと確認したことになる。

(10.6) の両辺に $-(v/c)h$ を掛けると

$$-(v/c)z'h = \frac{-(v/c)zh - (v^2/c^2)y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.35)$$

である。(10.5) と (10.35) を辺々足して $(v/c)zh$ を消去すると

$$\begin{aligned} y' - (v/c)z'h &= \frac{y - (v^2/c^2)y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= y\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

になり

$$y = \frac{y' - (v/c)z'h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.36)$$

である。(10.36) は、(10.5) で $v \rightarrow -v$, $y' \rightarrow y$, $y \rightarrow y'$, $z \rightarrow z'$ に書き換えた変えた式である。つまり、(10.5) の逆変換式である。この結果は、(10.5) と (10.6) の式が数学的に矛盾がないことを示している。

以上のように、新ローレンツ変換から矛盾が生じないことを、「世界距離の座標変換不変性」、「光速不変の原理」、「逆変換」を使って証明した。ローレンツ変換と異なり、新ローレンツ変換の y' と z' の変換式が虚数 h を含むことで、今まで知られていなかった時空の構造が明らかになる。そのことを「**11. 4 次元時空の 2 重構造**」で詳しく説明する。

10.8 新ローレンツ変換の一般式

「**10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出**」で新ローレンツ変換を求めるときに、観測者 B の速度 v は観測者 A の x 軸方向に限定していた。新四元数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ は数学的計算なので、 B の速度 v が任意の方向の場合の新ローレンツ変換の一般式を求めることができる。これに対し、相対性理論では光と図形を使って考えるので、ローレンツ変換の一般式がどのようになるか想像することができない。事実、一般式が書かれた相対性理論の本をみつけない。

新ローレンツ変換の一般式を求めるには、「10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出」の B の座標 $(cth, vti, 0, 0)$ を $(cth, v_x ti, v_y tj, v_z tk)$ に変えて座標変換を行えばよい。まず、3次元空間で考える。観測者 A は原点 O に静止し、観測者 B は等速度 v で直線運動をしているとする。速度 v の3次元空間の成分を $(v_x i, v_y j, v_z k)$ とする。また、観測される点 D は3次元空間の座標 (xi, yj, zk) の位置に静止し、時刻0のときに A と B は原点 O で一致していたとする。 t 秒後には A は時刻 t , 3次元空間座標 $(0, 0, 0)$, B は時刻 t , 3次元空間座標 $(v_x ti, v_y tj, v_z tk)$, D は時刻 t , 3次元空間座標 (xi, yj, zk) である。これを4次元時空の座標で記述すると $A(cth, 0, 0, 0)$, $B(cth, v_x ti, v_y tj, v_z tk)$, $D(cth, xi, yj, zk)$ であり、新四元数は

$$A = cth, B = cth + v_x ti + v_y tj + v_z tk, D = cth + xi + yj + zk$$

である。

B による D の座標変換、つまり、 B から D がどう見えるを表す式は $D\bar{B}/|B|$ である。 $c > v$ の条件では

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(cth + xi + yj + zk)(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk)}{\sqrt{(cth + v_x ti + v_y tj + v_z tk)(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 h^2 - v_x^2 t^2 i^2 - v_y^2 t^2 j^2 - v_z^2 t^2 k^2}} \\ &\quad \times [cth(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk) + xi(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk) \\ &\quad + yj(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk) + zk(cth - v_x ti - v_y tj - v_z tk)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 h^2 - v_x^2 t^2 i^2 - v_y^2 t^2 j^2 - v_z^2 t^2 k^2}} \\ &\quad \times [-c^2 t^2 - cv_x t^2 hi - cv_y t^2 hj - cv_z t^2 hk + ctxhi + v_x tx - v_y txk + v_z txj \\ &\quad + ctyhj + v_x tyk + v_y ty - v_z tyi + ctzhk - v_x tzj + v_y tzi + v_z tz] \\ &= \frac{1}{cth\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\quad \times [(-c^2 t + v_x x + v_y y + v_z z)t + (x - v_x t)cthi + (y - v_y t)cthj + (z - v_z t)cthk \\ &\quad + (v_y z - v_z y)ti + (v_z x - v_x z)tj + (v_x y - v_y x)tk] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\quad \times [(ct - v_x x/c - v_y y/c - v_z z/c)h + (x - v_x t)i + (y - v_y t)j + (z - v_z t)k \\ &\quad + (v_z y/c - v_y z/c)hi + (v_x z/c - v_z x/c)hj + (v_y x/c - v_x y/c)hk] \end{aligned} \tag{10.37}$$

になる。

B による D の座標変換後の座標を $(ct'h, x'i, y'j, z'k)$ とすると新四元数は $ct'h + x'i + y'j + z'k$ なので係数を比較すると h 成分は

$$ct' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(ct - v_x x/c - v_y y/c - v_z z/c)$$

である。両辺を c で割って

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(t - v_x x/c^2 - v_y y/c^2 - v_z z/c^2) \quad (10.38)$$

になる。 i, j, k 成分は、それぞれ

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(x - v_x t + v_z y h/c - v_y z h/c) \quad (10.39)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(y - v_y t + v_x z h/c - v_z x h/c) \quad (10.40)$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(z - v_z t + v_y x h/c - v_x y h/c) \quad (10.41)$$

である。(10.38), (10.39), (10.40), (10.41) が新ローレンツ変換の一般式である。

B が x 軸方向に運動しているときは上の式で $v_y = v_z = 0$ の場合に相当するので、(10.38), (10.39), (10.40), (10.41) に $v_y = v_z = 0$ を代入すると

$$t' = \frac{t - v_x x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.42)$$

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.43)$$

$$y' = \frac{y + v_x z h/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.44)$$

$$z' = \frac{z - v_x y h/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.45)$$

になる。(10.42), (10.43), (10.44), (10.45) は「**10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出**」で求めた新ローレンツ変換 (10.3), (10.4), (10.5), (10.6) と一致する。

「**10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出**」で求めた新ローレンツ変換の y' と z' の式

$$y' = \frac{y + v_x z h/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - v_x y h/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

で h の項の符号が逆になっていることをおかしいと考えた人がいるかもしれないが、新ローレンツ変換の一般式 (10.40), (10.41) には偏りがないので数学的には矛盾しない

い. (10.40), (10.41) に $v_y = v_z = 0$ という条件を付けると, y' と z' に偏りが生じるのである. 観測者 A が観測者 B の運動方向を x 軸と決めた後で, x 軸と直交する y 軸と z 軸をどの方向にするかは自由である. つまり, y 軸と z 軸の選択は任意であり, どちらが優位ということはない. よって, y' と z' に偏りがあってはいけないと考えてしまう. しかし, 観測者 A が自分の意志で y 軸と z 軸を決めると, その結果 y' 軸と z' 軸が決まり, しかも偏りが生じるのである.

11. 4次元時空の2重構造

11.1 代数学の定理

新四元数の説明を読んでいるときに、賢明な読者は1つのことに気付いたのではないだろうか。それは、新四元数は実数と虚数 h, i, j, k の5種類の数を含んでいるので五元数ではないかということである。加減乗除の代数学的計算が可能な数の体系は実数、複素数、四元数、八元数しかないという代数学の定理がある。つまり、五元数は数学的にありえないのである。

上の代数学の定理を少し説明する。例えば複素数では実数を a, b 、虚数を i とすると数は a と bi の2種類しか存在しない。ただし、虚数 i を b 倍した bi は虚数と考える。虚数に虚数を掛けても $bi \times i = -b$ 、 $bi \times i \times i = -bi$ のように実数か虚数になる。つまり、どんな計算をしても数は実数と虚数の2種類しか存在しないので複素数は二元数である。ハミルトンの四元数でも同じである。四元数では実数と3種類の虚数 i, j, k を合わせて4種類の数がある。 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ 、 $ij = k$ 、 $jk = i$ 、 $ki = j$ 、 $ijk = k^2 = -1$ のように、どんな計算も最後には実数と虚数 i, j, k の4種類の数になってしまう。よって、四元数である。

新四元数は実数と虚数 h, i, j, k の5種類の数以外に hi, hj, hk の3種類の数を含んでいる。計算の最後に hi, hj, hk が残った場合、それよりも簡単な数にすることができないので hi, hj, hk は新四元数の独立した構成要素である。つまり、新四元数は実数と h, i, j, k, hi, hj, hk の合計8種類の数を基本的数にしているので八元数である。さらに、 hi, hj, hk は虚数かける虚数であり2乗すると $(hi)(hi) = h^2 i^2 = 1$ になるので新しい実数と考えられる。つまり、新四元数は4種類の実数と4種類の虚数から構成される八元数である。

既に存在する八元数はケイリー数として知られているが、曲がりがないユークリッド時空の数なので、非ユークリッド時空の数である新四元数とは異なっている。また、ケイリー数は1種類の実数と7種類の虚数で構成されている。よって、新四元数は既存の八元数とは異なっているので、今後、「新八元数」とよぶことにする。新八元数は加減乗除の代数学的定理がその存在を認める最後の数なので、非ユークリッド4次元時空の現象は新八元数を使ってすべて計算できる可能性がある。

11.2 八元数

新八元数の性質を考える前に、グレイブズの八元数について説明する。山田修司先生が翻訳した、J. H. コンウェイ、D. A. スミス (John H. Conway and Derek A. Smith)

著の「四元数と八元数」(On Quaternions and Octonions) に詳しく書いてあるが、グレイブズ (John T. Graves) が 1844 年に八元数を発見している。グレイブズは四元数を発見したハミルトンの友人である。四元数の発見が 1843 年なので、ほぼ同時期に八元数が発見されている。グレイブズは八元数の発見を手紙でハミルトンに知らせ、さらに細部を検討していたのであるが、ケイリー (Arthur Cayley) が 1845 年に論文として発表した。ハミルトンはグレイブズが先に発見していたことを学会誌に投稿したが、既に八元数はケイリー数として知れ渡っていたため今日でもケイリー数とよばれている。

八元数は一つの実数と 7 種類の虚数で構成され、 a, b_n を実数、 i_n を虚数とすると

$$a + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$$

と表記される。そして、演算規則は

$$i_n^2 = -1$$

$$i_n i_{n+1} = i_{n+3} = -i_{n+1} i_n$$

$$i_{n+1} i_{n+3} = i_n = -i_{n+3} i_{n+1}$$

$$i_{n+3} i_n = i_{n+1} = -i_n i_{n+3}$$

であり、複雑すぎて具体的イメージをつかみにくい。

最近、素粒子の研究で八元数を使い始めているが、計算が複雑であることとユークリッド時空の数学であることから正しい結論に達しない可能性がある。それに対して、新八元数は演算規則が簡単であり、しかも、非ユークリッド時空の数学なので素粒子の研究の強力な道具になるかもしれない。

11.3 新八元数

グレイブズの八元数と異なり、新四元数、すなわち新八元数はハミルトンの四元数の演算規則

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

に

$$h^2 = -1, \quad hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

を加えただけなので理解しやすい。また、相対性理論を使って今まで説明したように、非ユークリッド 4 次元時空の性質を新八元数を使って数学的に証明することができる。さらに、グレイブズの八元数では実数 a 以外の 7 種類の虚数は 2 乗するとすべて -1 になるが、新八元数では h, i, j, k の 2 乗だけが -1 になり、実数と hi, hj, hk の 2

乗は +1 になる. この違いは新八元数が非ユークリッド時空の数学であることから生じている.

グレイブズの八元数が理解されにくい原因は, 現実の時空は曲がった非ユークリッド時空であるの対し, 八元数は曲がりがないユークリッド時空の数学であることである. 非ユークリッド時空の現象を八元数で計算するので, 複雑になっている可能性がある. これに対して, 新八元数は非ユークリッド時空の数学なので, 非ユークリッド時空のこの世界では計算が簡単になるのではないだろうか. 逆にいうと, 簡単に計算できる新八元数がこの世界の現象を記述できる数学であると考えられる.

新八元数 A の絶対値 $|A|$ を考える. 新八元数 A を

$$A = ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$$

とする. ただし, a, b, c, d, p, q, r, s は実数であり, h, i, j, k は虚数である. 複素数や新複素数, 四元数, 新四元数の共役数の定義から, 共役新八元数 $\bar{A}$ は虚数 ah と実数 p 以外の符号を負にして

$$\bar{A} = ah - bi - cj - dk + p - qhi - rhj - shk$$

と仮定する. また, 複素数などの絶対値の定義 $|A|^2 = A\bar{A}$ が新八元数でも成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk) \\ &\quad \times (ah - bi - cj - dk + p - qhi - rhj - shk) \end{aligned} \quad (11.1)$$

になる. 複素数や新複素数, 四元数, 新四元数の結果から (11.1) の計算結果は

$$\begin{aligned} |A|^2 &= (ah)^2 - (bi)^2 - (cj)^2 - (dk)^2 + p^2 - (qhi)^2 - (rhj)^2 - (shk)^2 \\ &= -a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + p^2 - q^2 - r^2 - s^2 \end{aligned} \quad (11.2)$$

になるはずであると考えられるかもしれないが, (11.1) を計算してみると (11.2) にはならない.

実際に (11.1) を計算する.

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk) \\ &\quad \times (ah - bi - cj - dk + p - qhi - rhj - shk) \\ &= [(ah + p) + (b + qh)i + (c + rh)j + (d + sh)k] \\ &\quad \times [(ah + p) - (b + qh)i - (c + rh)j - (d + sh)k] \\ &= (ah + p)^2 - (b + qh)^2 i^2 - (c + rh)^2 j^2 - (d + sh)^2 k^2 \\ &= (ah + p)^2 + (b + qh)^2 + (c + rh)^2 + (d + sh)^2 \end{aligned} \quad (11.3)$$

である. (11.2) と (11.3) を比較すると

$$2aph + 2bqh + 2crh + 2dsh$$

の差があり, $|A|^2$ は期待された (11.2) にならない.

11.4 2重構造を持つ4次元時空

(11.3) の解釈は, 「新八元数は, $(ah+p)$ 軸, $(b+qh)i$ 軸, $(c+rh)j$ 軸, $(d+sh)k$ 軸の4本の座標軸で形成される4次元時空を表す数である」となる. 「4次元時空の各座標軸は複素数であり, 各座標軸は実数と虚数の2つの成分を同時に持つ」ということもできる. このとき, $(ah+p)$ 軸は時間軸であり, $(b+qh)i$ 軸, $(c+rh)j$ 軸, $(d+sh)k$ 軸は空間軸になる. なぜなら, 新四元数を使って相対性理論の結果を証明するときに, ah 軸を時間軸にして, bi 軸, cj 軸, dk 軸を空間軸にした計算で矛盾が生じなかったからである.

虚数 h を p に掛けて $(ah+p)$ 軸を $(a+ph)$ 軸に変えれば数式としてすっきりすると考えられるかもしれないが, そうするとハミルトンの四元数 $a+bi+cj+dk$ に戻ってしまい非ユークリッド時空の数ではなくなる. この本では, 新複素数から順に理論を進めて新八元数 $ah+bi+cj+dk+p+qhi+rhj+shk$ にたどり着いたのであるが, 数式の美しさだけで4次元時空の数学を作ろうとしたら $a+bi+cj+dk+ph+qhi+rhj+shk$ にしてしまい, 新八元数に到達しなかっただろう.

「4次元時空の各座標軸は複素数である」という数学的結論は, 我々にとって受け入れがたい内容であるが, 受け入れ可能な解釈もある. それは, 「4次元時空は2つの時空の重なりであり, 我々の時空の座標は (ah, bi, cj, dk) で表され, もう一方の時空の座標は (p, qhi, rhj, shk) で表される」という考えである. そして, 我々はもう一方の時空の座標 (p, qhi, rhj, shk) を観測することができず, もう一方の世界からは我々の時空の座標 (ah, bi, cj, dk) を観測できないと考えるのである. この解釈を「4次元時空の2重構造」とよぶことにする. 将来, 「4次元時空の各座標軸は複素数である」という事実をそのまま受け入れることができる人々が現れるかもしれないが, 現時点では受け入れやすい「4次元時空の2重構造」を仮定する. つまり, 2つの4次元時空の各座標軸が重なって存在すると考えるのである. 簡単に説明するために, 今後, 我々の世界を「正の世界」とよび, もう一方の世界を「負の世界」とよぶことにする.

パラレルワールド (平行宇宙) という言葉があり, 多数の宇宙が並んで存在するという考えがあるが, 数学的事実は, 二つの4次元時空が重なって存在するか, 各座標軸が複素数である一つの4次元時空が存在するだけである.

また, 八元数であるから8次元時空を表す数であるに違いないと考えた読者もいるかもしれないが, (11.3) が示すように, 数学的事実は「新八元数は各座標軸が複素数の4次元時空を表す」か「新八元数は重なった二つの4次元時空を表す」である.

新八元数は代数学の定理が認める最後の数なので、2重構造を持つ4次元時空よりも大きい次元の時空は存在できない。16次元宇宙などの多次元宇宙論があるが、代数学の定理から考えると数学的にはあり得ない。

また、虚数の世界は想像の世界であると考え人が多いが、新八元数による計算では、我々は4本の座標軸が虚数 ah, bi, cj, dk の世界に住んでいるのであり、負の世界が実数の座標軸 p, qhi, rhj, shk を持っているのである。先に我々の世界を「正の世界」とよぶことにしたが、正確に言えば、我々の世界は「虚数の世界」であり、もう一方の世界は「実数の世界」である。

11.5 負の世界の新八元数と新ローレンツ変換

この単位では、「4次元時空の2重構造」理論に従って、負の世界の構造を考える。我々が住む正の世界の座標は (cth, xi, yj, zk) であり、世界点を表す新八元数は $cth + xi + yj + zk$ である。よって新八元数

$$A = ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$$

で、変数 ah, bi, c, dk は cth, xi, yj, zk に相当する。では、新八元数の残りの変数 p, qhi, rhj, shk は何に相当するのだろうか。

正の世界の世界点を表す新八元数 $cth + xi + yj + zk$ に h を掛けると $-ct + xhi + yhj + zhk$ になる。これは、新八元数の残りの変数 p, qhi, rhj, shk と形が同じなので、 p, qhi, rhj, shk を $-ct, xhi, yhj, zhk$ で置き換えるのが数学的に自然である。よって、負の世界の世界点を表す新八元数は $-ct + xhi + yhj + zhk$ の可能性がある。この新八元数 $-ct + xhi + yhj + zh$ の $-ct$ を ct に置き換えて、負の世界の世界点を表す新八元数を $ct + xhi + yhj + zhk$ とすることも考えられる。それぞれの新八元数を使って負の世界のローレンツ変換の式を求め、どちらが妥当かを検討する。

(1) 負の世界の新八元数が $-ct + xhi + yhj + zhk$ の場合

「10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出」で新ローレンツ変換を求めた方法で、正の世界の世界点の新八元数 $cth + xi + yj + zk$ を負の世界の世界点の新八元数 $-ct + xhi + yhj + zhk$ に置き換えて計算する。また、 x 軸上の運動を考えるので $y = z = 0$ とする。負の世界で観測者 A は原点 O に静止し、観測者 B は x 軸上を等速度 v で直線運動をしているとする。また、観測される点 D は距離 x の位置に静止し、時刻 0 のときに A と B は原点 O で一致していたとする。 t 秒後には A は時刻 t 距離 0 、 B は時刻 t 距離 vt 、 D は時刻 t 距離 x である。座標は $A(-ct, 0)$ 、 $B(-ct, vthi)$ 、 $D(-ct, xhi)$ であり、新八元数は $A = -ct$ 、 $B = -ct + vthi$ 、 $D = -ct + xhi$ である。観測者 A は、時間 t は経過するが距離 x は 0 なので $-ct$ 軸上を移動する。観測者 B は直線 $x = vt$ 上を移動する。時空図は後で図示する。

座標変換の式 $D\bar{B}/|B|$ は B による D の座標変換を表す. つまり, 等速直線運動をする B から見た D の座標を表す. 新八元数 $B = -ct + vthi$, $D = -ct + xhi$ を使って $D\bar{B}/|B|$ を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(-ct + xhi)(-ct - vthi)}{\sqrt{(-ct + vthi)(-ct - vthi)}} \\ &= \frac{c^2t^2 + cvt^2hi - xcthi - xvt h^2i^2}{\sqrt{(-ct)^2 - (vthi)^2}} \\ &= \frac{c^2t^2 - xvt + cvt^2hi - xcthi}{\sqrt{(-ct)^2 - (vthi)^2}}\end{aligned}\quad (11.4)$$

になる.

(11.4) の分母の $\sqrt{}$ から ct を出す前に ct の符号を考える. 正の世界の世界点を表す新八元数 $cth + xi + yj + zk$ で $ct = x = y = z = 1$ の場合, 新八元数は $h + i + j + k$ である. これが正の世界の基本新八元数である. 新八元数 $cth + xi + yj + zk$ に h を掛けて負世界の世界点を表す新八元数 $-ct + xhi + yhj + zhk$ を求めたので, 負の世界の基本新八元数は $h + i + j + k$ に h を掛けて $-1 + hi + hj + hk$ になる. この式から負の世界の時間成分の符号は負であることがわかる. よって, $-ct < 0$ つまり, $ct > 0$ と考えられる.

$(hi)^2 = h^2i^2 = (-1)(-1) = 1$ なので, $ct > 0$ の条件で (11.4) の分母の $\sqrt{}$ から ct を出すと

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{c^2t^2 - xvt + cvt^2hi - xcthi}{\sqrt{(-ct)^2 - (vthi)^2}} \\ &= \frac{c^2t^2 - xvt + cvt^2hi - xcthi}{ct\sqrt{1 - (vthi)^2/(-ct)^2}} \\ &= \frac{c^2t(t - vx/c^2) - ct(x - vt)hi}{ct\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(t - vx/c^2) - (x - vt)hi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\end{aligned}\quad (11.5)$$

になる. (11.5) は B から見た D の座標 $-ct' + x'hi$ なので

$$-ct' + x'hi = \frac{c(t - vx/c^2) - (x - vt)hi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 係数を比較して

$$t' = \frac{-t + (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\quad (11.6)$$

$$x' = \frac{-x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\quad (11.7)$$

になる. (11.6) と (11.7) は, 相対性理論のローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

と比べると符号が逆になっている.

(11.6) で $x = 0$ にすると $t' = -t/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ になり t' と t の符号が逆になってしまう. 静止している観測者 A から見た D の時間 t と等速運動する観測者 B から見た D の時間 t' の符号が逆になるのはおかしいので, 負の世界の世界点の新八元数を $-ct + xhi + yhj + zhk$ にすると矛盾が生じる. よって, $-ct + xhi + yhj + zhk$, $ct > 0$ は否定されたと考えられる.

(2) 負の世界の新八元数が $ct + xhi + yhj + zhk$ の場合

新八元数 $B = ct + vthi$, $D = ct + xhi$ を使って $D\bar{B}/|B|$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(ct + xhi)(ct - vthi)}{\sqrt{(ct + vthi)(ct - vthi)}} \\ &= \frac{c^2t^2 - cvt^2hi + xcthi - xvth^2i^2}{\sqrt{(ct)^2 - (vthi)^2}} \\ &= \frac{c^2t^2 - xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{(ct)^2 - (vt)^2}} \end{aligned} \quad (11.8)$$

になる.

(11.8) の分母の $\sqrt{}$ から ct を出す前に ct の符号を考える. この場合, 負の世界の世界点を表す新八元数 $-ct + xhi + yhj + zhk$ で $-ct$ を ct に置き換えたので, (1) で考えた負の世界の基本新八元数 $-1 + hi + hj + hk$ で -1 を 1 に置き換えて, 負の世界の基本新八元数は $1 + hi + hj + hk$ になる. この式から時間成分の符号は正であることがわかる. つまり, $ct > 0$ と考えられる. よって, (11.8) の分母の $\sqrt{}$ から ct を出して

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{c^2t^2 - xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{(ct)^2 - (vt)^2}} \\ &= \frac{c^2t(t - vx/c^2) + ct(x - vt)hi}{ct\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(t - vx/c^2) + (x - vt)hi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (11.9)$$

になる. B から見た D の座標を表す新八元数は $ct' + x'hi$ なので, (11.9) から

$$ct' + x'hi = \frac{c(t - vx/c^2) + (x - vt)hi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である．係数を比較して

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.10)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.11)$$

になる．(11.10) と (11.11) は、相対性理論のローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

と同じである．また、(11.10) で $x = 0$ のときに $t' = t/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ となり (1) の場合と違って時間の符号が観測者によって変化しない．よって、負の世界の世界点を表す新八元数を $ct + xhi + yhj + zhk$, $ct > 0$ と考えることが妥当であると考えられる．

ここで $ct > 0$ の意味を考えて (2) の場合の 4 次元時空図を描く．ただし、 $y = z = 0$ なので新複素平面になる． $ct > 0$ には 2 つの場合が考えられる． $c > 0$ のときは $t > 0$ となり、 $c < 0$ のときは $t < 0$ になる．

正の世界の新ローレンツ変換の y' , z' の式は h を含んでいるので、負の世界に入っている．正負の世界で光速 c の符号が変わると新ローレンツ変換が成り立たないので、正の世界で $c > 0$, $t > 0$ のときは負の世界でも $c > 0$, $t > 0$ と考えるのが妥当である． $c > 0$ の条件から $v > 0$ であり、 $v > 0$, $t > 0$ の条件から $x > 0$ なので、負の世界の観測者 B の世界線 $x = vt$ を新複素平面に描くと原点 O から右上向きの直線になる．また、光の世界線も同様に右上向きで ct 軸と xhi 軸から等距離の直線になる．これを図示すると図 11.1 のようになり、正の世界の新複素平面と比べると正の世界と負の世界が重なっていることがわかる．

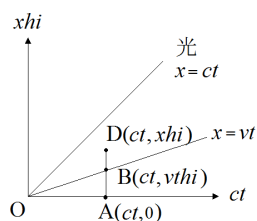


図 11.1

(11.10) と (11.11) からわかる大切なことがある．それは、負の世界でも正の世界と同じ物理法則が成り立つということである．しかも、式の形が全く同じである．その結果、負の世界にも物質があり重力があると考えられる．これは物理学における重要な発見である．

11.6 負の世界の世界距離

負の世界の世界点 A の新八元数が $A = ct + xhi + yhj + zhk$ のとき, 世界距離 s がどうなるかを計算する.

$$\begin{aligned} h^2 &= i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j \\ hi &= ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} s^2 &= A\bar{A} \\ &= (ct + xhi + yhj + zhk)(ct - xhi - yhj - zhk) \\ &= (ct)^2 - ct xhi - ct yhj - ct zhk + xcthi - (xhi)^2 - xyh^2ij - xzh^2ik \\ &\quad + ycthj - yxh^2ji - (yhj)^2 - yzh^2jk + ctzkh - zxh^2ki - zyh^2kj - (zhk)^2 \\ &= c^2t^2 - ct xhi - ct yhj - ct zhk + ct xhi - x^2 + xyk - zxj \\ &\quad + ct yhj - xyk - y^2 + yzi + ct zhk + zxj - yzi - z^2 \\ &= c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \end{aligned} \tag{11.12}$$

である.

「7.2 新四元数による世界距離の導出」で求めたように正の世界の世界距離は

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{7.6}$$

なので, (11.12) は (7.6) の符号を逆にしたものである. そして, $c > v$ の条件では正の世界の世界距離の2乗は負なので, 負の世界の世界距離の2乗は正である.

この結果から, 我々の世界が「負の世界」であり負の世界が「正の世界」である. しかし, この事実を受け入れることに抵抗する人が多いので, 新八元数が認められるまでは我々の世界を「正の世界」と呼ぶ.

また, 「7.1 相対性理論の世界距離の定義」で説明した相対性理論の世界距離の定義

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \tag{7.1}$$

は, 負の世界の世界距離を表している.

11.7 2重構造を持つ4次元時空の世界点

以下の議論では, 負の世界の世界点を表す新八元数は $ct + xhi + yhj + zhk$ であると仮定する. そこで, 2重構造をとる4次元時空全体の世界点の新八元数は

$$A = ct_0h + x_0i + y_0j + z_0k + ct_1 + x_1hi + y_1hj + z_1hk \tag{11.13}$$

あるいは

$$A = (ct_0h + ct_1) + (x_0 + x_1h)i + (y_0 + y_1h)j + (z_0 + z_1h)k$$

になる. ただし $c > 0$, $t_0 > 0$, $t_1 > 0$ である. 演算規則は

$$h^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

$$hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

である.

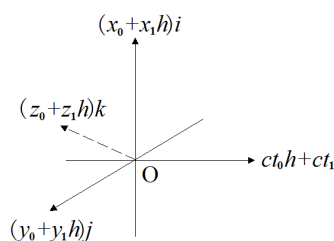


図 11.2

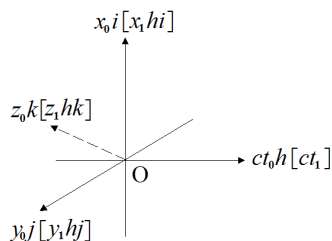


図 11.3

図 11.2 は「4次元時空の各座標軸は複素数である」と考えた場合の4次元時空図であり, 図 11.3 は「4次元時空は2重構造を持っている」と考えた場合の4次元時空図である. zk 軸と zhk 軸は図に描くことができないので破線で示した. また, 正の世界と負の世界を同時に図示する時は, $[ct]$, $[xhi]$, $[yhj]$, $[hkz]$ で負の世界の座標軸を表すことにする. 座標成分に正負の世界の座標成分が混じっている時は, この本では第6章から (cth, xi, yj, zhk) のように () 内に虚数も書くことにしているので混乱は起きない. 正の世界の座標 (ah, bi) と負の世界の座標 (a, bhi) は違っているが, ハミルトンの表記法では (a, b) のように実数しか書かないので, 正負のどちらの世界の座標かわからず不便である.

4次元時空全体の世界点を (11.13) で表すときに一つの疑問が生じる. すなわち, (11.13) の t_0 と t_1 , x_0 と x_1 , y_0 と y_1 , z_0 と z_1 は同じではないのかという疑問である. この疑問を解決するために, (11.13) を

$$\begin{aligned} B &= cth + xi + yj + zk + ct + xhi + yhj + zhk \\ &= (cth + ct) + (xi + xhi) + (yj + yhj) + (zk + zhk) \end{aligned} \quad (11.14)$$

に書き換えて, 座標変換 $D\bar{B}/|B|$ を行いローレンツ変換が導かれるかを調べる.

静止している観測者 A の x 軸方向に等速度 v で運動する観測者 B の新八元数は

$$\begin{aligned} B &= (cth + ct) + (vti + vthi) \\ &= ct(1 + h) + vti(1 + h) \\ &= (1 + h)(ct + vti) \end{aligned}$$

であり, 共役新八元数は

$$\begin{aligned} \bar{B} &= (cth + ct) - (vti + vthi) \\ &= (1 + h)(ct - vti) \end{aligned}$$

である. 観測される質点 D の新八元数は

$$\begin{aligned} D &= (cth + ct) + (xi + xhi) \\ &= ct(1 + h) + xi(1 + h) \\ &= (1 + h)(ct + xi) \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(1 + h)(ct + xi)(1 + h)(ct - vti)}{\sqrt{(1 + h)(ct + vti)(1 + h)(ct - vti)}} \\ &= \frac{(1 + h)(ct + xi)(ct - vti)}{\sqrt{(ct + vti)(ct - vti)}} \\ &= \frac{(1 + h)(c^2t^2 - cvt^2i + xcti - xvti^2)}{\sqrt{c^2t^2 - v^2t^2i^2}} \\ &= \frac{(1 + h)(c^2t^2 + xvt - cvt^2i + xcti)}{\sqrt{c^2t^2 + v^2t^2}} \\ &= \frac{(1 + h) [c^2t(t + vx/c^2) + ct(x - vt)i]}{ct\sqrt{1 + v^2/c^2}} \\ &= \frac{(1 + h) [c(t + vx/c^2) + (x - vt)i]}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} \\ &= \frac{c(t + vx/c^2)}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}h + \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}i + \frac{c(t + vx/c^2)}{\sqrt{1 + v^2/c^2}} + \frac{x - vt}{\sqrt{1 + v^2/c^2}}hi \end{aligned}$$

になる. この式が, B の座標から見た D の新八元数 $D' = ct'h + x'i + ct' + x'hi$ になるのであるが, ローレンツ変換にならないことは明らかである. よって, (11.14) のように正と負の世界の t, x, y, z を共通にすることは正しくないと考えられる. また, $\sqrt{1 + v^2/c^2}$ の c^2 の係数が負ではないことから, (11.14) は非ユークリッド時空の数学である新八元数をユークリッド時空の数学に戻してしまうと考えられる.

11.8 4次元時空の4種類の実数と4種類の虚数

「11.1 代数学の定理」で簡単に説明したが, 新八元数 $ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$ の構成要素である hi, hj, hk が虚数か実数かを詳しく検討する.

実数と虚数の定義を, 「2乗して正になる数は実数であり, 2乗して負になる数は虚数である」と仮定する. 演算規則から $h^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1$ なので, h, i, j, k は虚数である. これに対して, $hi = ih, hj = jh, hk = kh$ から

$$\begin{aligned}(hi)^2 &= hih i \\ &= h^2 i^2 \\ &= (-1)(-1) \\ &= 1 \\ (hj)^2 &= 1 \\ (hk)^2 &= 1\end{aligned}$$

なので hi, hj, hk は実数と考えられる. h 以外の虚数同士の掛け算 ij, jk, ki については, 2乗すると

$$\begin{aligned}(ij)(ij) &= k^2 = -1 \\ (jk)(jk) &= i^2 = -1 \\ (ki)(ki) &= j^2 = -1\end{aligned}$$

のように負になるので ij, jk, ki は虚数である. 以上の証明から, hi, hj, hk と ij, jk, ki は別の種類の数であり, hi, hj, hk は実数である.

「11.5 負の世界の新八元数と新ローレンツ変換」で証明したように, 我々が住む正の世界の世界点の新八元数は $cth + xi + yj + zk$ であり, 負の世界の世界点の新八元数は $ct + xhi + yhj + zhk$ である. よって, h は「時間虚数」であり i, j, k は「空間虚数」である. 同様に, 我々が普段使っている実数は「時間実数」であり hi, hj, hk は「空間実数」である. また, 正の世界の座標軸はすべて虚数であり, 負の世界の座標軸はすべて実数である. 我々が日常生活で使っている実数 a は, 負の世界の「時間実数」であるが $a \times i = ai$ のように倍数も表すので「倍数実数」とよぶこともできる.

現在, 虚数はハミルトンの四元数

$$a + bi + cj + dk$$

の i, j, k やグレイブズの八元数

$$a + b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3 + b_4 i_4 + b_5 i_5 + b_6 i_6 + b_7 i_7$$

の $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ が知られているが, 実数は1種類しか存在しないと考えられている. しかし, 上記のように実数には時間実数(倍数実数)以外に3種類の空間

実数 hi , hj , hk が存在する．このことが真実ならば、既存の数学や物理学は、4次元時空に存在する4種類の実数と4種類の虚数のうち、倍数実数と虚数 i の2種類の数しか使っていないことになる．量子力学で使われている虚数は i だけである．また、ハミルトンの4元数は一部の分野で使われているだけである．

新八元数の内容を知ったあとで、この4次元時空で起こることは8種類の数すべてを使わなければ正確に説明することはできないのではないかと考えることは自然である．そして、新八元数を使った計算は8種類の数すべてを使うので、4次元時空の現象を正確に計算できる可能性がある．このことは、相対性理論の t' と x' の式

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.4)$$

を光を使わずに新八元数による座標変換 $\bar{A}/|A|$ 使って数学的に求め、さらに相対性理論では見逃していた y' と z' の式

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

を見出したことで証明されたと考えられる．

12. 4次元時空の斜交座標

12.1 x 軸方向の運動時の斜交座標

座標変換で座標軸がどう変わるかを調べることは、座標変換の理論の正しさを検証するために必要である。「4. 新複素平面と斜交座標軸」では、2次元時空で座標変換後の座標軸は斜交座標軸になることを証明した。この章では、観測者 A の cth , xi , yj , zk 軸と観測者 B の $ct'h$, $x'i$, $y'j$, $z'k$ 軸の4次元時空における関係を調べる。

物理学や数学を専門としない読者には不必要な内容かもしれないが、以下の検討で得られる「座標変換で yj , zk 軸が移動した座標軸は正の世界の $y'j$ 軸と負の世界の $z'hk$ 軸になり、 yj - zk 平面は正負の二つの世界の1本ずつの座標軸から構成される $y'j$ - $z'hk$ 平面になる」という結論は重要である。つまり、正負の世界は互いに独立して存在するのではなく、入り混じっている。この結論を以下に証明する。

観測者 A の x 軸方向に観測者 B が速度 v で等速直線運動をしているとすると、4次元時空図は図 12.1 のようになる。

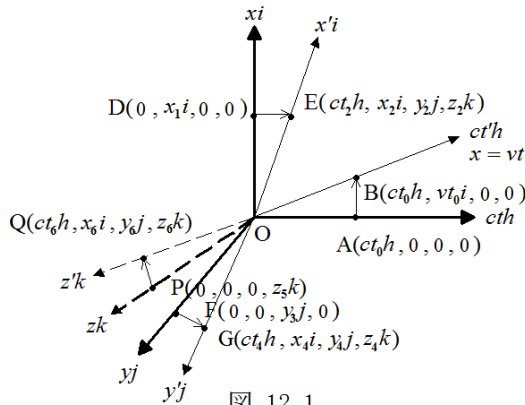


図 12.1

太い実線は観測者 A の cth , xi , yj 軸であり太い破線は zk 軸である。細い実線は観測者 B の $ct'h$, $x'i$, $y'j$ 軸であり細い破線は $z'k$ 軸である。また、 $ct'h$ 軸は観測者 B の世界線 $x = vt$ であり B の y 座標成分と z 座標成分は 0 である。

A から見た A と B の時刻 ct_0 は同じなので、 cth 軸を $ct'h$ 軸に変える座標変換で cth 軸上の点 $A(ct_0h, 0, 0, 0)$ が $ct'h$ 軸上の点 $B(ct_0h, vt_0i, 0, 0)$ へ移る。また、 xi 軸上の点 $D(0, x_1i, 0, 0)$ は $x'i$ 軸上の点 $E(ct_2h, x_2i, y_2j, z_2k)$ に移り、 yj 軸上の点

$F(0, 0, y_3j, 0)$ は $y'j$ 軸上の点 $G(ct_4h, x_4i, y_4j, z_4k)$ に移るとする. 同様に, zk 軸上の点 $P(0, 0, 0, z_5k)$ は $z'k$ 軸上の点 $Q(ct_6h, x_6i, y_6j, z_6k)$ に移るとする.

A から B への移動は原点中心の回転なので新八元数 H で表すことができる. 点 A と点 B の新八元数は $A = ct_0h$, $B = ct_0h + vt_0i$ なので, $AH = B$ から

$$\begin{aligned} ct_0hH &= ct_0h + vt_0i \\ H &= \frac{ct_0h + vt_0i}{ct_0h} \quad (: t_0 \neq 0) \\ &= 1 + \frac{vi}{ch} \\ &= 1 + \frac{vih}{ch^2} \\ &= 1 - \frac{v}{c}hi \end{aligned} \tag{12.1}$$

になる. (12.1) は, cth 軸を $ct'h$ 軸にする式である.

D, E について, 新八元数は $D = x_1i$, $E = ct_2h + x_2i + y_2j + z_2k$ である. 変換 H で D を E へ移すので, $DH = E$ から

$$x_1iH = ct_2h + x_2i + y_2j + z_2k$$

である. この式に (12.1) を代入して

$$\begin{aligned} ct_2h + x_2i + y_2j + z_2k &= x_1i(1 - \frac{v}{c}hi) \\ &= x_1i - \frac{vx_1}{c}hi^2 \\ &= x_1i + \frac{v}{c}x_1h \\ &= \frac{v}{c}x_1h + x_1i \end{aligned}$$

になる. 係数を比較して

$$ct_2 = \frac{v}{c}x_1, \quad x_2 = x_1, \quad y_2 = 0, \quad z_2 = 0$$

である. この式から x_1 を消去して

$$x_2 = \frac{c}{v}(ct_2), \quad y_2 = z_2 = 0 \tag{12.2}$$

になる. (12.2) が $x'i$ 軸の方程式である. 時間軸の単位は ct なので, $x'i$ 軸の傾きは c^2/v ではなく c/v である. cth 軸が移動した $ct'h$ 軸の傾きは, $x = vt = (v/c)ct$ から v/c なので, $x'i$ 軸と $ct'h$ 軸は xi 軸と cth 軸から同じ角度で内側に傾いている. つまり, $x'i$ 軸と $ct'h$ 軸は斜交座標軸である. ただし, $y_2 = z_2 = 0$ なので 2 次元の $cth-xi$ 平面内で斜交座標軸が作られる.

次に y 軸から y' 軸を求める. F, G について, 新八元数は $F = y_3j, G = ct_4h + x_4i + y_4j + z_4k$ である. $FH = G$ から

$$y_3jH = ct_4h + x_4i + y_4j + z_4k$$

である. この式に (12.1) を代入して

$$\begin{aligned} ct_4h + x_4i + y_4j + z_4k &= y_3j(1 - \frac{v}{c}hi) \\ &= y_3j - \frac{v}{c}y_3hji \\ &= y_3j + \frac{v}{c}y_3hk \end{aligned}$$

になる. 係数を比較して

$$ct_4 = 0, x_4 = 0, y_4 = y_3, z_4 = \frac{v}{c}y_3h$$

である. この式から y_3 を消去して

$$z_4 = \frac{v}{c}y_4h, ct_4 = x_4 = 0 \quad (12.3)$$

になる. (12.3) が $y'j$ 軸の方程式である. これを $ct = x = 0$ の yj - $[zhk]$ 平面で描くと図 12.2 のようになる. z は h を掛けているので負の世界の $[zhk]$ 軸成分になる.

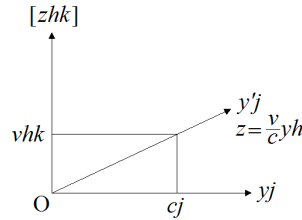


図 12.2

「11.7 2 重構造を持つ 4 次元時空の世界点」で説明したように, zk 軸は正の世界の座標軸であり $[zhk]$ 軸は負の世界の座標軸なので, 図 12.2 で横軸は正の世界の yj 軸であり縦軸は負の世界の $[zhk]$ 軸である. そして, この図から, 正と負の世界は互いに独立に存在するのではなくモザイク状に混じっていることがわかる. 我々が理解できるようにするために, 「座標成分が複素数の一つの 4 次元時空」を「正負の二つの世界」に分けたので, 正負の世界の座標軸が混在することは不思議なことではない. 座標成分が複素数の 4 次元時空が一つあり, 条件により正の世界の座標軸や負の世界の座標軸が観測されればよいのかもしれない.

ここで, 正確に言えば「正の世界と負の世界」ではなく「虚数の世界と実数の世界」であることを再確認する. 理解しやすいように「正の世界と負の世界」とよんでいる

のであり、正の世界では数がすべて正であるという意味ではない。「世界と反世界」という言葉を使いたかったが、「反物質」という物理学用語がすでに存在するので採用できなかったのである。この本の内容が認められたら、少なくとも「虚数の世界と実数の世界」という言い方に変えるべきである。

(12.3) から $y'j$ 軸の yj 軸からの傾きは v/c なので、 $ct'h$ 軸や $x'i$ 軸と同じように元の座標軸から v/c 傾いており、斜交座標軸になる。

$z'k$ 軸についても同様の計算をする。 zk 軸上の点 $P(0, 0, 0, z_5k)$ は $z'k$ 軸上の点 $Q(ct_6h, x_6i, y_6j, z_6k)$ に移る。新八元数は $P = z_5k$, $Q = ct_6h + x_6i + y_6j + z_6k$ なので、 $PH = Q$ から

$$z_5kH = ct_6h + x_6i + y_6j + z_6k$$

である。この式に (12.1) を代入して

$$\begin{aligned} ct_6h + x_6i + y_6j + z_6k &= z_5k(1 - \frac{v}{c}hi) \\ &= z_5k - \frac{v}{c}z_5hki \\ &= -\frac{v}{c}z_5hj + z_5k \end{aligned}$$

になる。係数を比較して

$$t_6 = 0, x_6 = 0, y_6 = -\frac{v}{c}z_5h, z_6 = z_5$$

である。この式から z_5 を消去すると

$$y_6 = -\frac{v}{c}z_6h, t_6 = x_6 = 0 \quad (12.4)$$

になる。(12.4) が $z'k$ 軸の方程式である。(12.4) は (12.3) と異なり、負の世界の $[yhj]$ 軸と正の世界の zk 軸からなる平面を意味する。図示すると図 12.3 のようになる。

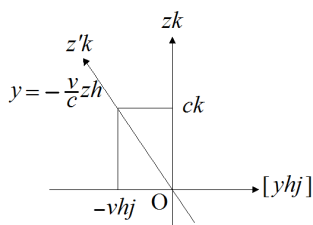


図 12.3

図 12.2 と図 12.3 は座標軸が異なるので重ねることはできない。そこで、(12.4) の

$$y_6 = -\frac{v}{c}z_6h$$

の両辺に ch/v を掛けると

$$\begin{aligned}\frac{c}{v}y_6h &= -\frac{v}{c}z_6h\left(\frac{c}{v}h\right) \\ &= z_6\end{aligned}$$

になる. つまり, $z'k$ 軸上の点 Q が満たす方程式は, $yj-[zhk]$ 平面では

$$z_6 = \frac{c}{v}y_6h, \quad t_6 = x_6 = 0$$

になる. z_6 の式から $z'k$ 軸は $[zhk]$ 軸から v/c の傾きの直線になり, h を含むので $[z'hk]$ 軸になることがわかる. つまり, 図 12.4 のように $[z'hk]$ 軸は $ct = x = 0$ の $yj-[zhk]$ 平面で $y'j$ 軸と斜交座標を形成する.

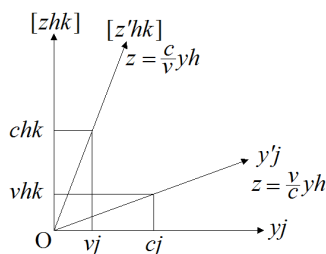


図 12.4

以上の結果から, 4次元時空で cth 軸を $ct'h$ 軸に変える座標変換は4本の斜交座標軸を作ることが証明された. また, 観測者 B の速度 v が観測者 A の x 軸方向である場合, 4次元時空のできごととは $cth-xi$ 平面と $yj-[zhk]$ 平面の2つの2次元平面上で図示したり計算すればよいことがわかる. つまり, B の速度 v が A の x 軸方向である場合, 複雑な4次元時空図を考えずに2枚の2次元平面図を使って4次元時空のできごとを描いたり計算できる.

$cth-xi$ 平面と $yj-[zhk]$ 平面が互いに独立していることは, 「10.3 新ローレンツ変換と世界距離」で説明した世界距離の不変性を表す式

$$-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

が $-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2$ と $y'^2 + z'^2 = y^2 + z^2$ の2つに分けて計算できることから証明される. その理由は, 新ローレンツ変換やローレンツ変換の式で ct' と x' の式は y と z を含まず, y' と z' の式は ct と x を含まないことである.

12.2 任意の方向の運動時の斜交座標

観測者 B の速度 v が観測者 A の x 軸方向である場合は cth - xi 平面と yy - $[zhk]$ 平面だけ考えればよいのであるが、観測者 B の速度 v が任意の方向のときは複雑な 4 次元時空図を考えなければならない。このことは、 cth 軸を $ct'h$ 軸に変える座標変換後の各座標軸の一般式を計算すればわかる。この単元では観測者 B の速度 v が任意の方向のときの座標軸の移動を調べるが、式が多くなるので時間軸と xi 軸の移動だけを計算する。

観測者 A から見た観測者 B の速度 v の 3 次元空間の成分を $(v_x i, v_y j, v_z k)$ とすると $v = v_x i + v_y j + v_z k$ なので

$$\begin{aligned} v^2 &= v\bar{v} \\ &= (v_x i + v_y j + v_z k)(-v_x i - v_y j - v_z k) \\ &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \end{aligned}$$

である。4 次元時空図は図 12.1 で点 B の座標を $(ct_0 h, v_x t_0 i, v_y t_0 j, v_z t_0 k)$ に変えた図になる。 A と B の時刻 ct_0 は同じなので、座標変換 H で cth 軸上の点 $A(ct_0 h, 0, 0, 0)$ が $ct'h$ 軸上の点 $B(ct_0 h, v_x t_0 i, v_y t_0 j, v_z t_0 k)$ へ移る。点 A と点 B の新八元数は $A = ct_0 h$, $B = ct_0 h + v_x t_0 i + v_y t_0 j + v_z t_0 k$ なので、 $AH = B$ から

$$\begin{aligned} ct_0 h H &= ct_0 h + v_x t_0 i + v_y t_0 j + v_z t_0 k \\ H &= \frac{ct_0 h + v_x t_0 i + v_y t_0 j + v_z t_0 k}{ct_0 h} \quad (: t_0 \neq 0) \\ &= 1 + \frac{1}{ch}(v_x i + v_y j + v_z k) \\ &= 1 + \frac{h}{ch^2}(v_x i + v_y j + v_z k) \\ &= 1 - \frac{h}{c}(v_x i + v_y j + v_z k) \end{aligned} \tag{12.5}$$

になる。(12.5) は、 cth 軸を $ct'h$ 軸にする式である。

ここで、 $ct'h$ 軸の傾きを計算する。点 B の cth 軸方向の成分は $ct_0 h$ である。 cth 軸に垂直な成分 $v_x t_0 i + v_y t_0 j + v_z t_0 k$ の大きさは

$$\begin{aligned} &\sqrt{(v_x t_0 i + v_y t_0 j + v_z t_0 k)(-v_x t_0 i - v_y t_0 j - v_z t_0 k)} \\ &= t_0 \sqrt{-v_x^2 i^2 - v_y^2 j^2 - v_z^2 k^2} \quad (: t_0 > 0) \\ &= t_0 \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ &= vt_0 \end{aligned}$$

になる. 以上の計算から点 B の cth 軸方向の成分の大きさは ct_0 であり, cth 軸に垂直な成分の大きさが vt_0 なので

$$vt_0/ct_0 = v/c \quad (12.6)$$

が $ct'h$ 軸の cth 軸からの傾きである. つまり, B の速度 v が任意の方向のときでも座標変換後の $ct'h$ 軸の傾きは v/c である. この結果は B の速度 v が A の x 軸方向である場合と同じである.

D について, 新八元数は $D = x_1i$ であり, 変換 H で D を E へ移すので

$$E = x_1iH$$

である. この式に (12.5) を代入して

$$\begin{aligned} E &= x_1i \left[1 - \frac{h}{c}(v_xi + v_yj + v_zk) \right] \\ &= x_1i - \frac{x_1h}{c}(v_xi^2 + v_yij + v_zik) \\ &= x_1i - \frac{x_1h}{c}(-v_x + v_yk - v_zj) \\ &= \frac{v_x x_1}{c}h + x_1i + \frac{v_z x_1}{c}hj - \frac{v_y x_1}{c}hk \end{aligned} \quad (12.7)$$

になる. (12.7) が $x'i$ 軸上の点 E の新八元数である.

ここで, $x'i$ 軸の xi 軸からの傾きを計算する. 点 E の xi 軸方向の成分は x_1i である. xi 軸に垂直な成分の大きさは, (12.7) の x_1i 成分以外を使って

$$\begin{aligned} &\sqrt{(v_x x_1 h/c + v_z x_1 h j/c - v_y x_1 h k/c)(v_x x_1 h/c - v_z x_1 h j/c + v_y x_1 h k/c)} \\ &= \sqrt{(v_x x_1 h/c)^2 - (v_z x_1 h j/c)^2 - (v_y x_1 h k/c)^2} \\ &= (h/c) \sqrt{v_x^2 x_1^2 + v_z^2 x_1^2 + v_y^2 x_1^2} \\ &= vx_1 h/c \quad (: x_1 > 0) \end{aligned}$$

になる. 以上の結果から点 E の xi 軸方向成分の大きさは x_1 であり xi 軸に垂直な成分の大きさは vx_1/c なので $x'i$ 軸の xi 軸からの傾きは

$$(vx_1/c)/x_1 = v/c \quad (12.8)$$

である. (12.6) と (12.8) は同じなので, 一般の場合でも $ct'h$ 軸と $x'i$ 軸は斜交座標軸を形成する.

同様の計算から, $y'j$ 軸上の点 G と $z'k$ 軸上の点 I の新四元数は

$$\begin{aligned} G &= \frac{v_y y_2}{c}h - \frac{v_z y_2}{c}hi + y_2j + \frac{v_x y_2}{c}hk \\ I &= \frac{v_z z_3}{c}h + \frac{v_y z_3}{c}hi - \frac{v_x z_3}{c}hj + z_3k \end{aligned}$$

になる. (12.8) を求めた計算法で $y'j$ 軸と $z'k$ 軸の傾きを求めることができるが, 式が多くなるので省略する.

12.3 新ローレンツ変換の y' と z' 成分の意味

「10.1 新四元数によるローレンツ変換の導出」で求めたように, 4次元時空における新ローレンツ変換は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.4)$$

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

である. (10.3) と (10.4) は相対性理論のローレンツ変換と同じであるが, (10.5) と (10.6) はローレンツ変換の

$$y' = y \quad (3.5)$$

$$z' = z \quad (3.6)$$

とは異なり, 負の世界の成分 hj , hk を含んでいる. なぜなら, (10.5) と (10.6) は正確に書くと

$$y'j = \frac{yj + (v/c)zhj}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$z'k = \frac{zk - (v/c)yhk}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

だからである.

「12.1 x 軸方向の運動時の斜交座標」で証明したように座標変換後に $yy-zk$ 平面は $yy-[zhk]$ 平面に変わるので, (10.5) と (10.6) が hj , hk を含むのだと考えられる. そこで, (10.5) と (10.6) を $yy-[zhk]$ 平面の直線の交点の座標から求めることができることを示す.

観測者 B の速度 v を観測者 A の x 軸方向にした場合, 4次元時空の出来事は $cth-xi$ 平面と $yy-[zhk]$ 平面の2つの2次元平面上で図示したり計算すればよいことが「12.1 x 軸方向の運動時の斜交座標」で証明されている. そこで, 次のページの図 12.5 のように $yy-[zhk]$ 平面上の点 $D(y_0j, z_0hk)$ を考える.

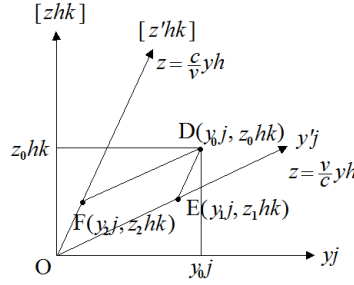


図 12.5

D から斜交座標軸の $y'j$ 軸と $[z'hk]$ 軸に平行に引いた直線と各座標軸との交点を $E(y_1j, z_1hk)$, $F(y_2j, z_2hk)$ とする. ただし, 静止した観測者 A の yj - zk 座標軸を最初から yj - $[zhk]$ 座標軸にしなければ計算がうまくいかない. この理由は不明である.

(1) y' の新ローレンツ変換の式を求める

直線 DE は傾きが $[z'hk]$ 軸と同じ c/v であり点 $D(y_0j, z_0hk)$ を通るので, その方程式は

$$z - z_0 = \frac{c}{v}(y - y_0)h \quad (12.9)$$

である. また, $y'j$ 軸の方程式は

$$z = \frac{v}{c}yh \quad (12.10)$$

である. (12.9) と (12.10) は点 $E(y_1j, z_1hk)$ を通るので

$$z_1 = \frac{v}{c}y_1h \quad (12.11)$$

$$z_1 - z_0 = \frac{c}{v}(y_1 - y_0)h \quad (12.12)$$

になる. (12.11) から (12.12) を引くと

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{v}{c}y_1h - \frac{c}{v}(y_1 - y_0)h \\ &= \left(\frac{v}{c} - \frac{c}{v}\right)y_1h + \frac{c}{v}y_0h \\ \left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c}\right)y_1h &= \frac{c}{v}y_0h - z_0 \\ \frac{c}{v}(1 - v^2/c^2)y_1h &= \frac{c}{v}y_0h - z_0 \\ y_1h &= \frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(y_0h - \frac{v}{c}z_0\right) \\ y_1 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2}\left(y_0 + \frac{v}{c}z_0h\right) \end{aligned} \quad (12.13)$$

である. (12.11) に (12.13) を代入すると

$$z_1 = \frac{vh/c}{1 - v^2/c^2} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h) \quad (12.14)$$

になる. $|OE|$ を線分 OE の長さとする

$$\begin{aligned} |OE|^2 &= (y_1 j + z_1 k)(-y_1 j - z_1 k) \\ &= -y_1^2 j^2 - z_1^2 k^2 \\ &= y_1^2 + z_1^2 \end{aligned}$$

である. この式に (12.13) と (12.14) を代入して

$$\begin{aligned} |OE|^2 &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)^2 + \frac{v^2 h^2 / c^2}{(1 - v^2/c^2)^2} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)^2 \\ &= \frac{1 - v^2/c^2}{(1 - v^2/c^2)^2} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)^2 \\ &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)^2 \end{aligned}$$

である. $c > v$, $y_0 > 0$, $z_0 > 0$ なので

$$|OE| = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)$$

になる. $|OE|$ は B から見た y' 成分なので

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (y_0 + \frac{v}{c} z_0 h)$$

である. 一般化するために y_0 を y に置き換えると

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (12.15)$$

になる. (12.15) は, 新ローレンツ変換

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

と同じであり, $yj[zhk]$ 平面の直線の交点の座標から求めることができた.

(2) z' の新ローレンツ変換の式を求める

(1) と同様に直線の交点の座標から z' の式を求めることができるが, ここでは別の方法で求める. 「4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法」で証明したように, 斜交座

標では反対の座標軸の式は元の座標軸の式で y を zh に置き換え, y' を $z'h$ に置き換えれば求められる. (12.15) で y と y' を zh と $z'h$ に置き換えると

$$z'h = \frac{zh + (v/c)y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 両辺に $-h$ を掛けて

$$\begin{aligned} -hz'h &= \frac{-hzh - h(v/c)y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ z' &= \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (12.16)$$

になる. (12.16) は, 新ローレンツ変換

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

と同じである.

(12.15) と (12.16) から, yy - zk 平面の座標変換後の座標軸は yy 軸と $[zhk]$ 軸であり正の世界と負の世界が混在すると考えられる. また, 座標軸を負の世界の $[yhz]$ 軸と正の世界の zk 軸にしても同じ結論が得られる. ただし, 静止した観測者 A の yy - zk 座標軸を最初から yy - $[zhk]$ 座標軸にしなければ計算がうまくいかない理由は不明なので, 正と負の二つの 4 次元時空が重なって存在するとも考えるよりも各座標軸が複素数の一つの 4 次元時空があると考えた方がよいのかもしれない.

13. 新八元数の公理と定理

13.1 公理と定理の必要性

この本では、複素数で相対性理論を証明しようとして新複素数を作り、それを4次元時空に拡張して新四元数、すなわち新八元数を作った。そこで、新八元数は今まで存在しなかった数であり、その数学は全く新しい数学である。数学は公理や定理を作り、それに基づいて論理を進めなければ誤った結論に達する。この章では、以後の計算を間違えないために新八元数の公理と定理を決める。

公理と定理の意味を簡単に説明する。公理とはその数学の基本法則のうちで正しいと考えられるが証明できない法則である。例えば、 $1 + 1 = 2$ は正しいと考えられるが証明できないので公理である。定理とは公理を使って証明できる基本法則である。例えば、 $1 + 2 = 3$ は $1 + 1 = 2$ と「等式の両辺に同じ数を加えてもよい」という公理を使って証明できるので定理である。定理を使って証明した結論が矛盾しているときは、定理を疑い、定理が間違っているときは公理を疑えばよいのである。つまり、ある数学のすべての結論は元をたどれば公理に行き着くので、公理は数学で一番大切なものである。

小林昭七先生の「ユークリッド幾何から現代幾何へ」に詳しく書いてあるが、公理を決めてから議論を進めていくという数学を作った最初の人々は約2300年前のギリシャ人である。そして、その中でも「原論」を書いたユークリッド (Euclid) が有名である。ユークリッドは幾何学についての五つの公理と数学全体に関する五つの公理を決めた。正確には「決めた」のではなく「選んだ」のである。つまり、多くの法則の中で証明不可能であるが正しいと考えられる法則を公理に選んだのである。

幾何学の五つの公理の中でも第5公理が有名である。その内容は簡単にいうと「平行線は交わらない」である。一見、当たり前のことに思えるが、この第5公理を他の四つの公理で証明しようとする努力の過程で非ユークリッド幾何学が生まれたのである。つまり、「平行線は交わらない」を「平行線は交わる」に変えると、曲がった空間を表す非ユークリッド幾何学が作られるのである。非ユークリッド幾何学の代表がリーマン幾何学であり、アインシュタインはリーマン幾何学を使って一般相対性理論を作っている。平行線公理の例でわかるように、公理を決めておけば、その数学が正しいかどうかを他の学者が検証することができるし、新しい数学を作ることもできるのである。

数学と違って、物理学で公理を定めることはしない。また、物理学の教科書に公理という言葉は出てこない。しかし、ニュートン力学の前提である「絶対静止が存在する」は、証明することはできないが正しいと考えられたので公理である。これに対し

て、「絶対静止は存在しない」が相対性理論の公理である。このように、公理を疑うことから別の物理学が作られるので、最初に公理を定めておけば、その物理学の結論に矛盾が生じたときに公理を疑えばよいことになる。そこで、この本の結論に間違いが見つかったときにその原因を調べるために、新八元数の公理と定理を定める。ただし、以下の公理と定理は現時点におけるものであり、新八元数の正しさが証明された後で、数学者により書き換えられなければならない。

以下の公理や定理に時間が出てくることに違和感を感じる人が多いと考えられるが、新八元数は4次元時空を扱う数学なので自然なことである。数学が3次元空間を扱っている時はユークリッドの「原論」のように空間だけを考えて時間を考慮する必要はないが、4次元時空は時間を含んでいるので、新八元数の公理と定理に時間が出てくる。また、後の章で説明するように、速度と質量、エネルギー、運動量は新八元数と世界線から直接導かれるので、これらに関する公理と定理を新八元数の公理と定理に入れた。この本の結論は、「宇宙には物質は存在せず、新八元数だけが存在する」である。

13.2 新八元数の公理

公理1. 新八元数 A は実数 a, b, c, d, p, q, r, s と虚数 h, i, j, k を使い

$$A = ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$$

で表される。演算規則は

$$h^2 = i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

$$hi = ih, \quad hj = jh, \quad hk = kh$$

である。

公理1は正確には定理を含んでいる。なぜなら、 $k^2 = -1$ は $i^2 = j^2 = -1$ と $ij = -ji = k$ を使って求めることができるからである。実際に計算してみる。

$$\begin{aligned} k^2 &= ijij \\ &= i(-ij)j \\ &= -i^2j^2 \\ &= -(-1)(-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

である。よって、公理1から $k^2 = -1$ を削除しなければならないのだが、理解しやすさと便利さのために上記のように公理1を定めた。

公理 2. 新八元数 A の共役新八元数 $\overline{A}$ は

$$\overline{A} = ah - bi - cj - dk + p - qhi - rhj - shk$$

である.

公理 3. 新八元数 A の絶対値を $|A|$ とすると

$$|A|^2 = A\overline{A}$$

である.

公理 4. 新八元数の割算 $A \div B$ は

$$A \div B = \frac{A\overline{B}}{|B|^2}$$

である.

公理 5. 新八元数による $B\overline{A}/|A|$ は, 4次元時空で A による B の座標変換を表す. ただし, $A = ah + bi + cj + dk$ か $A = p + qhi + rhj + shk$ のどちらか一つを使う.

「2.2 複素数による座標変換の一般式」で2次元時空では $B\overline{A}/|A|$ が座標変換になることを証明したが, 4次元時空に拡張してよいかどうかは証明していない. また, $A = ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$ を使った場合には座標変換にならないことは「11.7 2重構造を持つ4次元時空の世界点」で証明した.

公理 6. 時間 t は光速 c を掛けて ct にすることで, 距離 x, y, z と加法減法を行うことができる.

光速 c の単位は [距離]/[時間] なので, ct の単位は

$$\frac{[\text{距離}]}{[\text{時間}]} \times [\text{時間}] = [\text{距離}]$$

になる.

公理 7. 4次元時空の世界点を表す新八元数は

$$A = ct_0h + x_0i + y_0j + z_0k + ct_1 + x_1hi + y_1hj + z_1hk$$

である. ただし, $ct_0 > 0$, $ct_1 > 0$ である.

「11.5 負の世界の新八元数と新ローレンツ変換」でこの結論を導き出したが, 負の世界でも $ct > 0$ かどうかについては疑問が残っているので公理にした. また, $ct > 0$ の条件から $c > 0$, $t > 0$ と $c < 0$, $t < 0$ の二つの場合が可能であるが, この本では正

と負の両方の世界で $c > 0$ であるとして議論を進めた。なぜなら、新ローレンツ変換の y' と z' の式が負の世界の成分を含んでいるので、 c の符号を一つにする必要があったからである。

公理 8. 我々の住む正の世界の世界点を表す新八元数は

$$ct_0h + x_0i + y_0j + z_0k$$

であり、 $ct_0 > 0$ である。同時に存在する負の世界の世界点を表す新八元数は

$$ct_1 + x_1hi + y_1hj + z_1hk$$

であり、 $ct_1 > 0$ である。

4次元時空の2重構造を考えずに、各座標軸が複素数の一つの4次元時空を考えることもできる。そのときの世界点を表す新八元数は

$$A = (ct_0h + ct_1) + (x_0 + x_1h)i + (y_0 + y_1h)j + (z_0 + z_1h)k$$

になる。

公理 9. $\sqrt{\quad}$ の中が負のときは、負になる原因を $\sqrt{\quad}$ から出す。

「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で説明したように、 $c > v$ のとき

$$c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2 = -c^2t^2 + v^2t^2 < 0$$

である。そこで、 $ct > 0$ の条件では

$$\begin{aligned}\sqrt{c^2t^2h^2 - v^2t^2i^2} &= cth\sqrt{1 - (v^2t^2i^2)/(c^2t^2h^2)} \\ &= cth\sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

のように、 cth を $\sqrt{\quad}$ の外に出して $\sqrt{\quad}$ の中を正にする。この方法の正しさは証明されていないので公理である。

公理 10. 物質と光の違いは4次元時空の通過場所の違いだけであり、世界距離が0の世界点、つまり

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

を満たす世界点 (cth, xi, yj, zk) を通る世界線が光である。

この公理は「8.3 光の世界距離が0であることの解釈と光速不変の原理」で説明した。

公理 11. 世界線は力が加えられなければ四次元時空の2点間を結ぶ直線になる。

「9.4 世界線の曲がり」と力」で説明したが、「力が加えられなければ世界線は直線となり、力が加えられれば世界線は曲がる」と言い換えることもできる。また、力の存在を否定して「世界線の衝突と反射による世界線の曲りが力である」を公理にすることもできる。

公理 12. 2 重構造を持つ 4 次元時空で、速度 V が x, y, z の 3 方向の成分 (V_x, V_y, V_z) を持つとき、まず y - z 平面の合成速度 $V_{yz} = \sqrt{V_y^2 + V_z^2}$ を求め、次に V_{yz}/V_x を計算すれば V の x 軸からの傾きが計算できる。

この公理は「16.5 シンクロトン放射光の傾き」で使う。

公理 13. 質量は単位世界線の時間成分である。ただし、1 単位の長さを η (エータ) とする。また、世界線の振幅 Ψ (プサイ) を掛け、質量を構成する世界線が N 本のときは N 倍する。

この公理は「18.1 質量は単位世界線の時間成分である」で説明する。

公理 14. 時間と空間は離散量である。

この公理は「19.3 ゼノンの背理と不連続公理」で説明するが、時間と空間は連続した値をとらず、不連続な値、すなわち離散量をとる。

13.3 新八元数の定理

次に定理を証明する。ある命題を否定する内容の定理では、その命題に当てはまらない具体例を示して定理の証明とする。また、「2 次元時空」と「2 次元空間」は意味が異なり、前者は一つの時間と 1 つの距離から成る時空であり、後者は二つの距離から成る空間である。実数と同じ定理、例えば $(A + B) + C = A + (B + C)$ や $A(B + C) = AB + AC$ などは省略して、実数あるいは複素数と異なる定理を記載した。図形に関する定理の大半は 2 次元で成り立つ定理であり 4 次元で成り立つ定理は作っていない。

定理 1. 複素数と異なり、二つの新八元数 A, B があるとき

$$AB \neq BA$$

である。

複素数 $A = a + bi$, $B = c + di$ があるとき

$$\begin{aligned} AB &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BA &= (c + di)(a + bi) \\
&= ca + cbi + dai + dbi^2 \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i
\end{aligned}$$

なので, 複素数では

$$AB = BA$$

である.

次に新八元数 A, B で考えるが, 虚数 k は公理 1 の説明にあるように虚数 i と j から導くことができるので, 新八元数 A, B の定理を証明するときに k 成分を省略しても一般性を失わないと考えられる. また, 否定する定理なので負の世界の成分を省略してもよいと考えられる.

$A = ah + bi + cj$, $B = dh + ei + fj$ と仮定すると

$$\begin{aligned}
AB &= (ah + bi + cj)(dh + ei + fj) \\
&= adh^2 + aehi + afhj + bdhi + bei^2 + bfi j + cdhj + ceji + cfj^2 \\
&= (-ad - be - cf) + (ae + bd)hi + (af + cd)hj + (bf - ce)k \\
BA &= (dh + ei + fj)(ah + bi + cj) \\
&= dah^2 + dbhi + dchj + eahi + ebi^2 + ecij + fahj + fbji + fcj^2 \\
&= (-ad - be - cf) + (ae + bd)hi + (af + cd)hj - (bf - ce)k
\end{aligned}$$

である. AB と BA を比較すると k 成分の符号が逆になっている. よって, 新八元数では

$$AB \neq BA$$

である. ハミルトンの四元数でも同じ結論になる.

定理 2. 複素数と同様に, 新八元数 A とその共役新八元数 $\overline{A}$ について

$$A\overline{A} = \overline{A}A$$

である.

定理 1 で二つの新八元数 A, B については $AB \neq BA$ であったが, 新八元数 A とその共役新八元数 $\overline{A}$ については $A\overline{A} = \overline{A}A$ が成り立つ. 定理 1 と同様に, k 成分を省略した新八元数で証明する. ただし, まず正の世界の新八元数で証明する.

新四元数 $A = ah + bi + cj$ について $\overline{A} = ah - bi - cj$ なので

$$\begin{aligned}
A\bar{A} &= (ah + bi + cj)(ah - bi - cj) \\
&= a^2h^2 - abhi - achj + bahi - b^2i^2 - bcij + cahj - cbji - c^2j^2 \\
&= (-a^2 + b^2 + c^2) - (ab - ba)hi - (ac - ca)hj - (bc - cb)k \\
&= -a^2 + b^2 + c^2 \\
\bar{A}A &= (ah - bi - cj)(ah + bi + cj) \\
&= a^2h^2 + abhi + achj - bahi - b^2i^2 - bcij - cahj - cbji - c^2j^2 \\
&= (-a^2 + b^2 + c^2) + (ab - ba)hi + (ac - ca)hj - (bc - cb)k \\
&= -a^2 + b^2 + c^2
\end{aligned}$$

である. よって

$$A\bar{A} = \bar{A}A$$

になる. 負の世界の新八元数を含む新八元数についても同様に証明されるが式が多くなるので省略する.

公理 3 で新八元数 A の絶対値 $|A|$ を $|A|^2 = A\bar{A}$ と定義するときに, $|A|^2 = \bar{A}A$ について説明しなかった理由は $A\bar{A} = \bar{A}A$ だからである.

定理 3. 複素数と異なり, 二つの新八元数 A, B があるとき

$$\overline{AB} \neq \bar{A} \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{B} \bar{A}$$

である.

複素数 $A = a + bi$, $B = c + di$ があるとき, 共役複素数は $\bar{A} = a - bi$, $\bar{B} = c - di$ なので

$$\begin{aligned}
\bar{A} \bar{B} &= (a - bi)(c - di) \\
&= ac - adi - bci + bdi^2 \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i
\end{aligned}$$

である. また

$$\begin{aligned}
\bar{B} \bar{A} &= (c - di)(a - bi) \\
&= (ac - bd) - (ad + bc)i
\end{aligned}$$

である. 定理 1 の証明で使った計算から

$$AB = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

なので, 複素数では

$$\overline{AB} = \overline{A} \overline{B} = \overline{B} \overline{A}$$

になる.

正の世界の新八元数 $A = ah + bi + cj$, $B = dh + ei + fj$ について

$$\overline{A} = ah - bi - cj, \overline{B} = dh - ei - fj$$

なので

$$\begin{aligned} \overline{A} \overline{B} &= (ah - bi - cj)(dh - ei - fj) \\ &= adh^2 - aehi - afhj - bdhi + bei^2 + bfij - cdhj + ceji + cfj^2 \\ &= (-ad - be - cf) - (ae + bd)hi - (af + cd)hj + (bf - ce)k \end{aligned}$$

である. 定理 1 の証明で使った計算結果から

$$AB = (-ad - be - cf) + (ae + bd)hi + (af + cd)hj + (bf - ce)k$$

なので

$$\overline{AB} = (-ad - be - cf) - (ae + bd)hi - (af + cd)hj - (bf - ce)k$$

である. $\overline{AB}$ と $\overline{A} \overline{B}$ を比較すると, k 成分の符号が逆になっている. よって

$$\overline{AB} \neq \overline{A} \overline{B}$$

である.

次に $\overline{B} \overline{A}$ を計算すると

$$\begin{aligned} \overline{B} \overline{A} &= (dh - ei - fj)(ah - bi - cj) \\ &= dah^2 - dbhi - dchj - eahi + ebi^2 + ecij - fahj + fbji + fcj^2 \\ &= (-ad - be - cf) - (ae + bd)hi - (af + cd)hj - (bf - ce)k \end{aligned}$$

になる. この式は $\overline{AB}$ と同じでなので, 正の世界の新八元数では

$$\overline{AB} = \overline{B} \overline{A}$$

が成り立つ. 負の世界の新八元数を含む新八元数でも同じ結果になるが式が多くなるので省略する.

定理 4. 三つの新八元数 A, B, C があるとき, 複素数と同様に演算の結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立つ.

この定理は $A = ah + bi + cj$, $B = dh + ei + fj$, $C = lh + mi + nj$ と仮定して $(AB)C$ と $A(BC)$ を計算すれば証明できる. 式が多くなるので証明は省略する. 負の世界の新八元数を含む新八元数

$$ah + bi + cj + dk + p + qhi + rhj + shk$$

は

$$(ah + p) + (b + qh)i + (c + rh)j + (d + sh)k$$

と書き換えられるので, 同様に結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が証明できる.

定理 5. グレイブズの八元数では演算の結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立たないが, 新八元数では成り立つ..

この定理は定理 4 の言い換えである. グレイブズの八元数との違いを強調するために書き換えた. グレイブズの八元数

$$a + b_1i_1 + b_2i_2 + b_3i_3 + b_4i_4 + b_5i_5 + b_6i_6 + b_7i_7$$

では結合法則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立たないことが知られている. この定理から, 結合法則が成り立たないグレイブズの八元数よりも結合法則が成り立つ新八元数の方が 4 次元時空の性質を表す自然な数であると考えられる.

定理 6. 複素数と同様に, 二つの新八元数 A, B があるとき

$$|AB|^2 = |A|^2 |B|^2$$

である.

公理 3 の $|A|^2 = A\bar{A}$ と定理 3 の $\overline{AB} = \bar{B} \bar{A}$, 定理 4 の $(AB)C = A(BC)$ から

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= AB\overline{AB} \\ &= (AB)(\bar{B} \bar{A}) \\ &= A(B\bar{B} \bar{A}) \\ &= A|B|^2 \bar{A} \\ &= A\bar{A}|B|^2 \\ &= |A|^2 |B|^2 \end{aligned}$$

である. 逆に, $|AB|^2 = |A|^2 |B|^2$ から $\overline{AB} = \bar{A} \bar{B}$ と考えてはいけない. 定理 3 で証明したように $\overline{AB} = \bar{B} \bar{A}$ である.

定理 7. 新八元数 A の絶対値 $|A|$ は正の実数か正の虚数になる.

実数や複素数の計算では絶対値は正の実数か 0 であるが、新八元数の絶対値は正の実数以外に正の虚数になることがある。複素数では $A = i$ のとき、公理 2 により $|A|^2 = A\bar{A}$ なので

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{A\bar{A}} \\ &= \sqrt{i(-i)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。しかし、新八元数では $A = h$ のときは

$$\begin{aligned} |A| &= \sqrt{A\bar{A}} \\ &= \sqrt{hh} \\ &= h \end{aligned}$$

になる。つまり、 $|A|$ は正の虚数である。絶対値は正の実数になるという先入観を捨てて、絶対値の定義 $|A|^2 = A\bar{A}$ だけを使って考えなければならない。

定理 8. $|A|^2 = \alpha$ の解は $A = \pm\sqrt{\alpha}$ 以外に無数にある。

この定理は、 $|A|^2 = \alpha$ から単純に $A = \pm\sqrt{\alpha}$ という結論を出してはいけないことを意味している。

$|A|^2 = 4$ の場合を考える。 A が実数の場合、 $|A|^2 = 4$ の解を $A = a$ とすると、公理 2 から

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= aa \\ &= a^2 \end{aligned}$$

である。 $|A|^2 = 4$ と a は実数の条件を使って

$$\begin{aligned} a^2 &= 4 \\ a &= \pm\sqrt{4} \\ a &= \pm 2 \end{aligned}$$

になるので、 $A = \pm 2$ である。

次に A が虚数 $a + bi$ の場合を考える。 a, b は実数である。公理 2 から

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

である. $|A|^2 = 4$ なので

$$a^2 + b^2 = 4$$

になる. この式を満たす a, b の組み合わせが無数にあることは明らかである. よって, A が複素数のとき, $|A|^2 = \alpha$ の解は無数にある.

次に A が新八元数の場合を考える. 簡単にするために, $A = ah + bi$ とする. 公理 2 から

$$\begin{aligned} |A|^2 &= A\bar{A} \\ &= (ah + bi)(ah - bi) \\ &= -a^2 + b^2 \end{aligned}$$

である. $|A|^2 = 4$ なので

$$-a^2 + b^2 = 4$$

になる. この式を満たす実数 a, b の組み合わせが無数にあることも明らかである. 同様に, A が新八元数のときも, $|A|^2 = \alpha$ の解は無数にある.

定理 9. 新八元数 A と B の関係を調べる場合, 同じ座標から見たときは係数を比較をしてもよいが, 別の座標から見たときは絶対値の一致を使わなければならない.

静止している観測者 A から見た質点 D の座標を $D(cth, xi)$ とし, A の x 軸方向に等速度 v で直線運動をしている観測者 B から見た D の座標を $D(ct'h, x'i)$ とすると, 「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で説明したように新複素平面は図 13.1 になる.

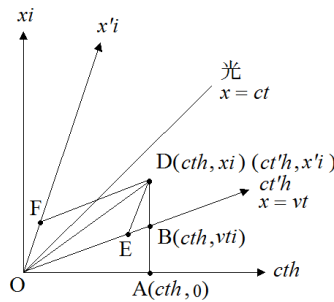


図 13.1

B の世界線の方程式 $x = vt$ が B の $ct'h$ 軸である. 光の世界線 $x = ct$ に対して $ct'h$ 軸と線対称な直線が B の $x'i$ 軸になる. 点 D から $x'i$ 軸に平行に引いた直線と $ct'h$ 軸との交点を E とし, 点 D から $ct'h$ 軸に平行に引いた直線と $x'i$ 軸の交点を F とする.

A から見た D の新八元数は $D_A = cth + xi$ であり, B から見た D の新八元数は $D_B = ct'h + x'i$ である. $D_A = D_B$ と考えると

$$cth + xi = ct'h + x'i$$

である. 係数を比較すると

$$ct = ct', \quad x = x'$$

になる. これはおかしい. なぜなら, 図 13.1 から

$$cth = |OA|, \quad x = |DA| \quad ct'h = |OE|, \quad x' = |OF|$$

であり, 明らかに

$$|OA| \neq |OE|, \quad |DA| \neq |OF|$$

だからである. $D_A = cth + xi$ の虚数 h と $D_B = ct'h + x'i$ の虚数 h は同じ座標軸上にないので係数比較はできない. 虚数 i についても同じである.

D_A と D_B は係数比較はできないが, 図 13.1 で明らかのように

$$|D_A| = |D_B|$$

の関係は成り立つので, この式を使って D_A と D_B の成分の関係を調べなければならない.

「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で新ローレンツ変換を求めるときには, 同じ座標軸上の虚数 h, i を使って係数比較をしているので矛盾は生じない.

定理 10. 2次元時空中において, 回転移動では図形の相似と合同は成り立たない.

図 13.2 で横軸は cth 軸, 縦軸は xi 軸とする. また, 点 A の座標を $(h, 0)$, 点 B の座標を (h, i) とする. 点 B は光の世界線 $x = ct$ 上にある.

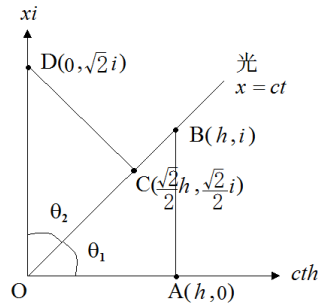


図 13.2

ユークリッド幾何学が2次元時空で成り立つと仮定すると、三角形 OAB を反時計周りに45度回転させて点 B が xi 軸上の点 D に移るとき、点 A は $x = ct$ 上の点 C に移る。ユークリッド幾何学では三平方の定理から $|OB| = \sqrt{2}$ なので点 D の座標は $(0, \sqrt{2}i)$ である。また、 $|OC| = 1$ なので三平方の定理から点 C の座標は $(\sqrt{2}h/2, \sqrt{2}i/2)$ である。ただし、 $|OB|$ と $|OC|$ は2点間の距離を表す。

ユークリッド幾何学では合同に見える $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ が合同かどうかを調べる。各点の新八元数は

$$A = h, B = h + i, C = \frac{\sqrt{2}}{2}h + \frac{\sqrt{2}}{2}i, D = \sqrt{2}i$$

である。世界距離の2乗は

$$\begin{aligned} |OA|^2 &= h^2 \\ &= -1 \\ |OB|^2 &= (h+i)(h-i) \\ &= h^2 - i^2 \\ &= -1 + 1 \\ &= 0 \\ |OC|^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}h + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \frac{1}{2}(h+i)(h-i) \\ &= \frac{1}{2}(h^2 - i^2) \\ &= \frac{1}{2}(-1 + 1) \\ &= 0 \\ |OD|^2 &= \sqrt{2}i(-\sqrt{2}i) \\ &= -2i^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{|OB|^2}{|OA|^2} &= \frac{0}{-1} \\ \frac{|OD|^2}{|OC|^2} &= \frac{2}{0} \end{aligned}$$

なので

$$\frac{|OB|^2}{|OA|^2} \neq \frac{|OD|^2}{|OC|^2}$$

である．つまり， $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ は合同でも相似でもない．このように，2次元時空では図形を回転移動させると辺の長さが変わってしまうので，一見，合同に見える図形同士も合同ではない．この理由は2次元時空は歪んだ非ユークリッド時空であることである．アインシュタインの一般相対性理論では質量が空間を曲げるのであるが，以上の結論は質量が存在しない4次元時空でも時間と空間の関係に歪みがあることを示している．図形の相似についても，上と同じ方法で回転移動では成り立たないことが証明できる．

時空の曲がりとは時間と空間の関係で起こるのであり，空間と空間の関係では回転移動で図形の相似と合同が成り立つことを新八元数で証明する．図 13.3 では横軸を xi 軸，縦軸を yj 軸とする．

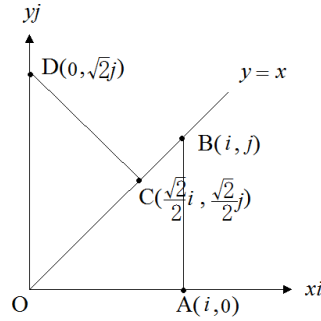


図 13.3

図 13.2 と同じように点 A, B, C, D を決めると，それぞれの座標は

$$A(i, 0), B(i, j), C(\frac{\sqrt{2}}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}j), D(0, \sqrt{2}j)$$

である．また，新八元数は

$$A = i, B = i + j, C = \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j, D = \sqrt{2}j$$

になる．辺 AB, CD を表す新八元数を $(AB), (CD)$ と書くことにすると

$$\begin{aligned} (AB) &= B - A \\ &= i + j - i \\ &= j \\ (CD) &= D - C \\ &= \sqrt{2}j - \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j \end{aligned}$$

なので、世界距離の 2 乗は

$$\begin{aligned}
|OA|^2 &= i(-i) \\
&= 1 \\
|OB|^2 &= (i+j)(-i-j) \\
&= -i^2 - ij - ji - j^2 \\
&= 1 - k + k + 1 \\
&= 2 \\
|AB|^2 &= j(-j) \\
&= -j^2 \\
&= 1 \\
|OC|^2 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \\
&= -\frac{1}{2}(i+j)(i+j) \\
&= -\frac{1}{2}(i^2 + ij + ji + j^2) \\
&= -\frac{1}{2}(i^2 + k - k + j^2) \\
&= 1 \\
|OD|^2 &= \sqrt{2}j(-\sqrt{2}j) \\
&= -2j^2 \\
&= 2 \\
|CD|^2 &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \\
&= -\frac{1}{2}(i-j)(i-j) \\
&= -\frac{1}{2}(i^2 - k + k + j^2) \\
&= 1
\end{aligned}$$

であり

$$|OA|^2 = |OC|^2, |OB|^2 = |OD|^2, |AB|^2 = |CD|^2$$

になる。よって、 $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ は合同であり、 $xi-yj$ 平面、 $yj-zk$ 平面、 $zk-xi$ 平面などの 2 次元空間では回転移動で図形の合同が成り立つ。相似についても同様の方法で証明できる。また、 $[xhi]-[yhj]$ 平面、 $[yhj]-[zhk]$ 平面、 $[zhk]-[xhi]$ 平面などの負の世界の 2 次元空間でも回転移動で図形の合同が成り立つ。

以上の結果から、時間と空間の関係は最初から曲がっており、空間同士には曲がりはない。ただし、定理 15 で証明するが、正と負の世界を同時に考えると、空間同士にも曲がりがある。

定理 11. 2 次元時空において、平行移動では図形の相似と合同が成り立つ。

この定理は定理 10 の補足である。命題の否定ではないので、一般的方法で証明する。

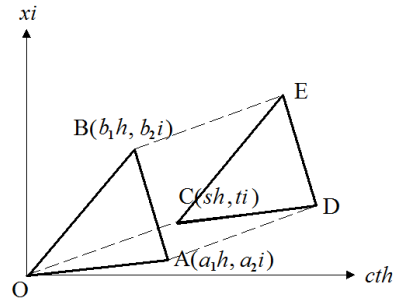


図 13.4

図 13.4 で横軸は cth 軸、縦軸は xi 軸とする。点 A の座標を (a_1h, a_2i) 、点 B の座標を (b_1h, b_2i) とする。△ OAB を cth 軸方向に sh 、 xi 軸方向に ti 平行移動させた図形を △ CDE とする。各点の新八元数は

$$A = a_1h + a_2i$$

$$B = b_1h + b_2i$$

$$C = sh + ti$$

$$D = a_1h + a_2i + sh + ti$$

$$E = b_1h + b_2i + sh + ti$$

である。辺 OA 、 OB 、 CD 、 CE を表す新八元数をそれぞれ (OA) 、 (OB) 、 (CD) 、 (CE) と書くと

$$(OA) = A = a_1h + a_2i$$

$$(OB) = B = b_1h + b_2i$$

$$(CD) = D - C$$

$$= a_1h + a_2i + sh + ti - sh - ti$$

$$= a_1h + a_2i$$

$$\begin{aligned}
(CE) &= E - C \\
&= b_1h + b_2i + sh + ti - sh - ti \\
&= b_1h + b_2i
\end{aligned}$$

なので

$$(OA) = (CD), (OB) = (CE)$$

である. よって, $\triangle OAB$ と $\triangle CDE$ は合同である. 相似についても同様に証明できる.

定理 12. 2次元時空において, 移動の前後で図形を構成する直線や曲線の傾きが同じなら相似や合同になり, 傾きが変われば相似にも合同にもならない.

これは定理 10 と定理 11 をまとめた定理である.

定理 13. 2次元時空において, 回転移動で角は保存されない.

定理 10 の証明で

$$\frac{|OB|^2}{|OA|^2} \neq \frac{|OD|^2}{|OC|^2}$$

なので

$$\angle AOB \neq \angle COD$$

よって, 回転移動で角は保存されない.

「1.3 複素数と回転」に, この本では角という言葉はなるべく使わないと書いた理由がこれである. 複素関数論に「等角写像」という言葉があるが, 現実の 4 次元時空は曲がっているので等角写像は成り立たない. 複素数の世界で等角写像が成り立つ理由は, 複素数が曲がりがないユークリッド 2 次元空間の数学だからである.

定理 14. 2次元時空において, 三角関数の公式は成り立たない.

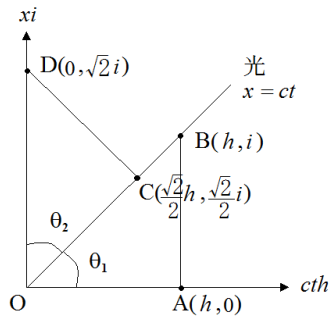


図 13.2

定理 10 の図 13.2 で $\angle AOB$, $\angle COD$ をそれぞれ θ_1 , θ_2 とするとユークリッド空間では $\theta_1 = \theta_2$ である. しかし

$$\begin{aligned}\cos \theta_1 &= \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{h}{0} \\ \cos \theta_2 &= \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{0}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

なので, 2 次元時空において三角関数は成り立たない. 三角関数が成り立つのは正の世界の 3 次元空間のみなので, 4 次元時空を扱う数学や物理学で三角数を使うと近似計算になってしまう可能性がある.

複素関数論に, 有名なオイラーの公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (13.1)$$

があるが, 三角関数を使っているので曲がりがないユークリッド空間のみで成り立つ式である.

(13.1) で $x = \pi$ と置き換えると, 数学の最も美しい公式の 1 つである

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (13.2)$$

が求められる. (13.2) が美しい理由は, 数学の基本的な定数

$$e, i, \pi, 0, 1$$

がすべて入っているからである. (13.2) は三角関数の式から求められたのであるが, 三角関数を含んでいないので非ユークリッド時空でも成り立つのではないかと考えられる. なぜなら, 定理 17 で証明するように, ユークリッド空間でしか成立しないと考えられているピタゴラス (Pythagoras) の三平方の定理が曲がった 2 次元時空でも成り立つからである. 単純で美しい公式には普遍性があるのではないかと考えられる.

定理 15. 正と負の世界を合わせた 2 次元空間は曲がっている.

定理 10 の証明で補足説明したように, 正の世界だけ考えたときには 2 次元空間の移動で距離は変化しない. しかし, 正と負の世界を合わせた 2 次元空間では距離が変化することを証明する.

次のページの図 13.5 で横軸を正の世界の yj 軸, 縦軸を負の世界の $[zhk]$ 軸とする. この座標平面は「**12.3 新ローレンツ変換の y' と z' 成分の意味**」で使った. 点 A の座標を (aj, bhk) とすると, A は yj - $[zhk]$ 平面の点になり, A を表す新八元数は $A = aj + bhk$ である.

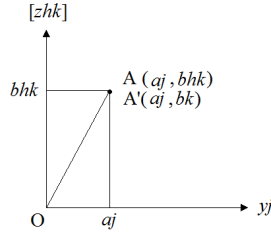


図 13.5

世界線の長さの2乗は

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= (aj + bhk)(-aj - bhk) \\
 &= -(aj)^2 - ajbhk - bhkaj - (bhk)^2 \\
 &= a^2 - abhi + abhi - b^2 \\
 &= a^2 - b^2
 \end{aligned} \tag{13.3}$$

である．正の世界の点 A' が点 A と同じ位置にあったとすると座標は (aj, bk) であり，新八元数は $A' = aj + bk$ である．世界線の長さの2乗は

$$\begin{aligned}
 |A'| &= (aj + bk)(-aj - bk) \\
 &= -(aj)^2 - abjk - bakj - (bk)^2 \\
 &= a^2 - abi + abi + b^2 \\
 &= a^2 + b^2
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

になる．(13.4) は正の世界だけを考えた時の世界線の長さの2乗であり，(13.3) は正と負の両方の世界を考えたり，4次元時空の各座標軸が複素数であると考えた時の世界線の長さの2乗である．つまり，正と負の世界を合わせた4次元時空全体を考えれば2次元空間も曲がっていることになる．

「12.1 x 軸方向の運動時の斜交座標」で証明したように， yj - zhk 平面は座標変換で yj - $[zhk]$ 平面になるので，静止した観測者の世界では空間は曲がっていないが，運動している観測者の空間は曲がっていることになる．

定理 16. 三平方の定理が成り立つときを直交と定義すると，2次元時空で2直線の傾きが m_1, m_2 のとき，直交の条件は $m_1 m_2 = 1$ である．ユークリッド2次元空間の直交条件 $m_1 m_2 = -1$ とは異なる．

ピタゴラスの三平方の定理とは，直角三角形で直角の両側の辺の長さ a, b の2乗の和は対辺の長さ d の2乗と等しいという定理である．式は $a^2 + b^2 = d^2$ である．定理13で証明したように，2次元時空では角は回転移動で保存しないので直角という言葉

は意味を持たない．そこで，ある 2 直線の交点と各直線上の 2 点間に三平方の定理が成り立つとき，その 2 直線は「直交」として定義する．つまり，直角だから三平方の定理が成り立つと考えるのではなく，三平方の定理が成り立てば直交すると考えるのである．角は意味を持たないので直交という言葉を使った．

まず，ユークリッド 2 次元平面で直交する 2 直線が満たす関係を復習する．図 13.6 のように原点を通り直交する 2 直線の方程式を $y = m_1x$ と $y = m_2x$ とする．

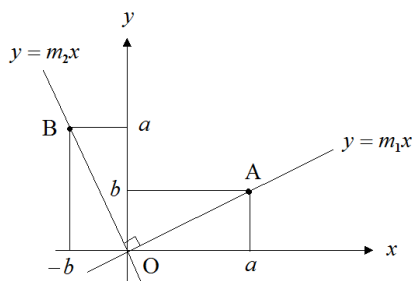


図 13.6

$\angle AOB$ は直角なので， $m_1 = b/a$ とすると $m_2 = -a/b$ である．よって

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= \frac{b}{a} \times \left(-\frac{a}{b}\right) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{13.5}$$

になる．(13.5) がユークリッド 2 次元平面で直交する 2 直線が満たす関係式である．

次に，図 13.7 のように 2 次元時空を考える．定理 11 から平行移動しても角は変化しないので，計算を簡単にするために 2 直線の交点を原点 O にする．

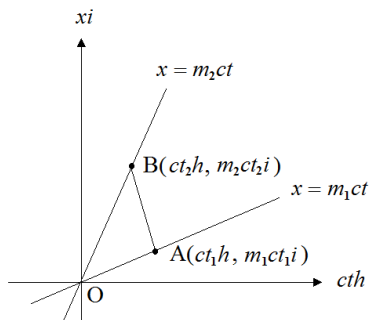


図 13.7

ある直線の方程式を $x = m_1 ct$ とし、その直線と直交する直線の方程式を $x = m_2 ct$ とする。ここで大切なことは、傾き m の直線の方程式は $x = mt$ ではなく $x = mct$ であることである。なぜなら、横軸の単位は t ではなく ct だからである。

$x = m_1 ct$ 上の点 A の座標を $(ct_1 h, m_1 ct_1 i)$ とし、 $x = m_2 ct$ 上の点 B の座標を $(ct_2 h, m_2 ct_2 i)$ とする。それぞれの新八元数は、 $A = ct_1 h + m_1 ct_1 i$ 、 $B = ct_2 h + m_2 ct_2 i$ である。また、辺 AB を表す新八元数を (AB) と書くと

$$\begin{aligned}(AB) &= B - A \\ &= ct_2 h + m_2 ct_2 i - ct_1 h - m_1 ct_1 i \\ &= c(t_2 - t_1)h + c(m_2 t_2 - m_1 t_1)i\end{aligned}$$

である。世界距離の 2 乗は

$$\begin{aligned}|OA|^2 &= (ct_1 h + m_1 ct_1 i)(ct_1 h - m_1 ct_1 i) \\ &= c^2 t_1^2 h^2 - m_1^2 c^2 t_1^2 i^2 \\ &= -c^2 t_1^2 + m_1^2 c^2 t_1^2\end{aligned}\tag{13.6}$$

$$\begin{aligned}|OB|^2 &= (ct_2 h + m_2 ct_2 i)(ct_2 h - m_2 ct_2 i) \\ &= c^2 t_2^2 h^2 - m_2^2 c^2 t_2^2 i^2 \\ &= -c^2 t_2^2 + m_2^2 c^2 t_2^2\end{aligned}\tag{13.7}$$

$$\begin{aligned}|AB|^2 &= [c(t_2 - t_1)h + c(m_2 t_2 - m_1 t_1)i] \\ &\quad \times [c(t_2 - t_1)h - c(m_2 t_2 - m_1 t_1)i] \\ &= c^2 (t_2 - t_1)^2 h^2 - c^2 (m_2 t_2 - m_1 t_1)^2 i^2 \\ &= -c^2 (t_2 - t_1)^2 + c^2 (m_2 t_2 - m_1 t_1)^2\end{aligned}\tag{13.8}$$

である。三平方の定理が成り立つと仮定すると

$$|OA|^2 + |OB|^2 = |AB|^2$$

なので、この式に (13.6), (13.7), (13.8) を代入して

$$-c^2 t_1^2 + m_1^2 c^2 t_1^2 - c^2 t_2^2 + m_2^2 c^2 t_2^2 = -c^2 (t_2 - t_1)^2 + c^2 (m_2 t_2 - m_1 t_1)^2$$

になる。式を展開すると

$$\begin{aligned}-c^2 t_1^2 + m_1^2 c^2 t_1^2 - c^2 t_2^2 + m_2^2 c^2 t_2^2 &= -c^2 t_2^2 + 2c^2 t_2 t_1 - c^2 t_1^2 \\ &\quad + c^2 m_2^2 t_2^2 - 2c^2 m_2 m_1 t_2 t_1 + c^2 m_1^2 t_1^2\end{aligned}$$

である。よって

$$0 = 2c^2 t_2 t_1 - 2c^2 m_2 m_1 t_2 t_1$$

である. $t_2 \neq 0$, $t_1 \neq 0$ のとき, 両辺を $2c^2t_2t_1$ で割ると

$$m_1m_2 = 1$$

になる. よって, 2次元時空で2直線が直交するとき, その傾きを m_1 , m_2 とすると

$$m_1m_2 = 1 \quad (13.9)$$

である. このことから, 曲がった2次元時空でも三平方の定理が成り立ち, (13.5) と (13.9) を比較すると, 符号が逆になっていることがわかる.

定理 17. 2次元時空では, 2直線の傾きが光の世界線 $x = ct$ や $x = -ct$ に対して線対称ならば, 交点と各直線上の2点間に三平方の定理が成り立つ.

次に, (13.9) を満たす2直線はどのようなものかを調べる.

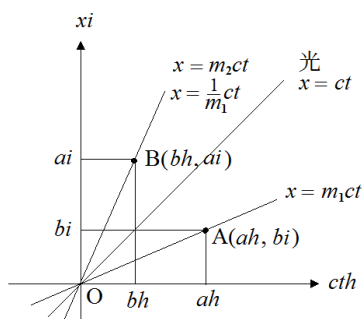


図 13.8

図 13.8 のように直線 $x = m_1ct$ 上の点 A の座標を $A(ah, bi)$ とすると

$$m_1 = \frac{b}{a}$$

である. これを2次元時空における直交条件

$$m_1m_2 = 1 \quad (13.9)$$

に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{b}{a}m_2 &= 1 \\ m_2 &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

になる. これは, 直線 $x = m_2ct$ 上に点 $B(bh, ai)$ があることを示している. 図 13.8 から明らかなように, 直線 $x = m_1ct$ の cth 軸からの傾きと, 直線 $x = m_2ct$ の xi 軸か

らの傾きは同じである。つまり、直線 $x = m_1 ct$ と直線 $x = m_2 ct$ は光の世界線 $x = ct$ に対して線対称であり斜交座標軸を形成している。2 直線の交点が原点 O でない場合も考えると、2 次元時空では、2 直線の傾きが光の世界線 $x = ct$ に対して線対称であれば、交点と各直線上の 2 点間に三平方の定理が成り立つ。これは、三平方の定理の普遍性を示している。また、 $x = -ct$ の直線に対して線対称の 2 直線が直交することも同じ方法で証明できる。

定理 18. 正と負の空間座標軸からなる yj - $[zhk]$ 平面や $[yhj]$ - zk 平面などの 2 次元時空中で 2 直線の傾きが m_1, m_2 のとき、直交の条件は $m_1 m_2 = 1$ である。

この定理は定理 16 と同じ方法で証明されるので、証明は省略する。(13.5) からわかるように正の世界の空間座標では $m_1 m_2 = -1$ であるが、正と負の世界の空間座標がモザイク状に混ざった yj - $[zhk]$ 平面や $[yhj]$ - zk 平面では $m_1 m_2 = 1$ である。

定理 19. 絶対的直角座標は存在しない。

定理 17 から、斜交座標でも直角座標でも三平方の定理は成り立つので、観測者は自分の座標が斜交なのか直角なのかを知ることはできない。つまり、斜交と直角は相対的なものであり、絶対的直角座標は存在しない。

また、直角座標を静止系と考えるので、絶対的直角座標が存在しないということは絶対的静止は存在しないということを意味する。等速直線運動は存在しているので、等速直線運動をしている A と B の速度が同じ時を静止と考える。

定理 20. 2 次元時空の cth - xi 平面で両座標軸から等距離にある直線と同じ傾きの直線の世界距離は 0 である。

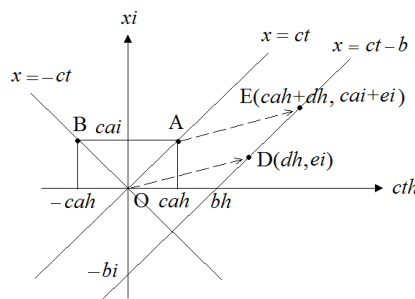


図 13.9

図 13.9 で cth 軸と xi 軸から等距離にある光の世界線の方程式は $x = ct$ であり、 $x = ct$ 上の点 A の座標は (cah, cai) で新八元数は $A = cah + cai$ である。

よって

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= (cah + cai)(cah - cai) \\
 &= (cah)^2 - (cai)^2 \\
 &= -c^2a^2 + c^2a^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

になる。このことは、「8.2 新四元数による光の世界距離の証明」で説明した。

次に $x = ct$ と傾きが同じである $x = ct - b$ 上に原点 O と点 A を移動させた点を D, E とする。点 D の座標を (dh, ei) とすると点 E の座標は $(cah + dh, cai + ei)$ である。そして、新八元数は

$$D = dh + ei, E = (ca + d)h + (ca + e)i$$

である。線分 DE を表す新八元数を (DE) と書くと

$$\begin{aligned}
 (DE) &= E - D \\
 &= (ca + d)h + (ca + e)i - (dh + ei) \\
 &= cah + cai
 \end{aligned}$$

になる。これは A と同じなので

$$\begin{aligned}
 |DE|^2 &= |A|^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

になる。よって、2次元時空の $cth-xi$ 平面で正の両座標軸から等距離にある直線と同じ傾きの直線の世界距離は0である。

次に、図 13.9 で $-cth$ 軸と xi 軸から等距離にある直線 $x = -ct$ 上の点 B の世界距離を計算する。 B の新八元数は $B = -cah + cai$ なので

$$\begin{aligned}
 |B|^2 &= (-cah + cai)(-cah - cai) \\
 &= (cah)^2 - (cai)^2 \\
 &= -c^2a^2 + c^2a^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

になる。よって、座標軸の符号が負の領域でも定理 20 が成り立つ。

定理 21. 正と負の世界の空間座標軸からなる $yj-[zhk]$ 平面や $[yhj]-zk$ 平面などの2次元空間で、両座標軸から等距離にある直線と同じ傾きの直線の世界距離は0である。

図 13.10 のように, yj - $[zhk]$ 平面で両座標軸から等距離にある直線 $z = yh$ 上の点 A を考える.

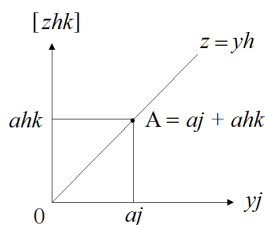


図 13.10

新八元数は $A = aj + ahk$ なので

$$\begin{aligned}
 |A|^2 &= (aj + ahk)(-aj - ahk) \\
 &= -(aj + ahk)(aj + ahk) \\
 &= -a^2j^2 - 2a^2hjk - 2a^2hkj - a^2h^2k^2 \\
 &= a^2 - 2a^2hi + 2a^2hi - a^2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

になる. よって, 定理 20 の証明と同じようにして, 両座標軸から等距離にある直線と同じ傾きの直線の世界距離は 0 であることが証明される.

定理 22. i を掛けることは, 2 次元時空で反時計回りの 90 度回転を意味する.

「1.3 複素数と回転」で説明したように, ユークリッド平面の複素平面で虚数 i を掛けると反時計回りに 90 度回転する. 非ユークリッド平面の cth - xi 平面でも同じことが成り立つことを証明する. ただし, 4 次元時空の 2 重構造を仮定しなければならない.

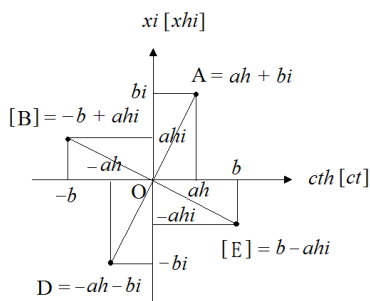


図 13.11

図 13.11 のように正と負の世界が重なった 2 次元時空を考える. 点 A の正の世界の座標を (ah, bi) とすると, 新八元数は $A = ah + bi$ である. i を順次掛けていく. 負の世界の点は [] で示す.

$$\begin{aligned} Ai &= (ah + bi)i = ahi + bi^2 = -b + ahi = [B] \\ Ai^2 &= [B]i = (-b + ahi)i = -ah - bi = D = -A \\ Ai^3 &= [B]i^2 = Di = (-ah - bi)i = b - ahi = [E] = -[B] \\ Ai^4 &= [B]i^3 = Di^2 = [E]i = (b - ahi)i = ah + bi = A \end{aligned}$$

つまり, i を掛けると反時計回りに 90 度回転するが, 正の世界と負の世界を交互に出入りする. 4 次元時空の 2 重構造を仮定しなければ, この定理は成り立たない.

2 次元時空での定理の証明は終わったが, 4 次元時空で i を掛けるとどうなるかを検討する.

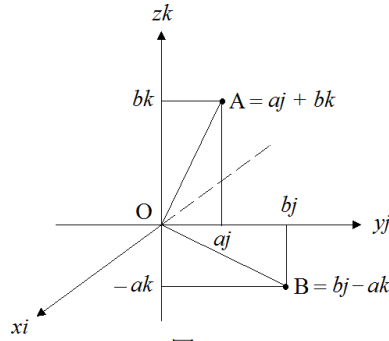


図 13.12

図 13.12 のように yj - zk 平面の点 $A = aj + bk$ を考える. A に i を掛けると

$$\begin{aligned} Ai &= (aj + bk)i \\ &= aji + bki \\ &= -ak + bj \\ &= bj - ak \end{aligned}$$

この点を B とすると, B は xi 軸の正の方向に右ネジが進んだ時の回転方向の逆方向に A を 90 度回転させた点になる.

図示しないが, xi - yj 平面の点 $A = ai + bj$ に i を掛けた場合は

$$\begin{aligned} Ai &= (ai + bj)i \\ &= -a - bk \end{aligned}$$

となり, 負の世界の時間成分 $-a$ と正の世界の z 軸成分 $-b$ を持つことになる.

定理 23. h を掛けることは, 2次元時空で座標軸に対して線対称な移動を意味する.

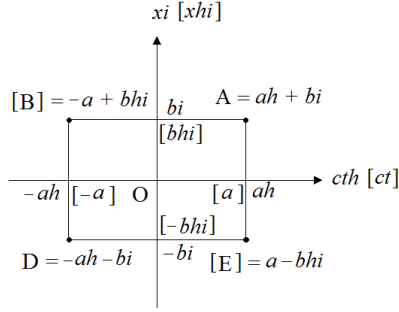


図 13.13

図 13.13 のように正と負の世界が重なった 2次元時空を考える. 点 A の正の世界の座標を (ah, bi) とすると, 新八元数は $A = ah + bi$ である. h を順次掛けていく.

$$\begin{aligned} Ah &= (ah + bi)h = ah^2 + bhi = -a + bhi = [B] \\ Ah^2 &= [B]h = (-a + bhi)h = -ah - bi = D = -A \\ Ah^3 &= [B]h^2 = Dh = (-ah - bi)h = a - bhi = [E] = -[B] \\ Ah^4 &= [B]h^3 = Dh^2 = [E]h = (a - bhi)h = ah + bi = A \end{aligned}$$

つまり, h を掛けると座標軸に対して線対称な移動をするが, 正の世界と負の世界を交互に出入りする. 定理 22 と同じように, 4次元時空の 2重構造がなければ定理 23 は成り立たない.

定理 24. $i/h = -hi$ を掛けることは, 2次元時空で光の世界線に対して線対称な移動を意味する.

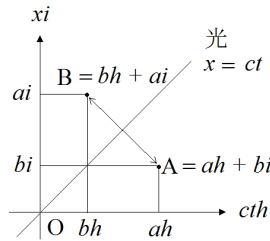


図 13.14

図 13.14 のように正の世界の 2 次元時空を考える．点 A の正の世界の座標を (ah, bi) とすると，新八元数は $A = ah + bi$ である． i/h を順次掛けていく．

$$\begin{aligned} A(i/h) &= A(-hi) = (ah + bi)(-hi) = -bhi^2 - ah^2i = bh + ai = B \\ A(i/h)^2 &= A(-hi)^2 = B(-hi) = (bh + ai)(-hi) = ah + bi = A \end{aligned}$$

よって， $i/h = -hi$ を掛けると，光の世界線に対して線対称に移動する．この場合は，正の世界の中で移動する．同様に負の世界の点 $A = a + bhi$ に $i/h = -hi$ を掛けると，光の世界線に対して線対称に負の世界の中で移動する．

また， hi を掛けると，世界線 $x = -ct$ に対して線対称に移動することも同じ方法で証明できる．

定理 25. 絶対値が 0 になる新八元数で，等式の両辺を割ることはできない．

次の等式を考える．

$$(h + i)hi = h^2i + hi^2 = -(h + i) \quad (13.10)$$

両辺を $(h + i)$ で割ることができると仮定すると，(13.10) の両辺を $(h + i)$ で割って

$$hi = -1$$

になる．この結果は，公理 1 が含んでいる「 hi は，他の数で置き換えることはできない基本的数である」という結論に矛盾する．よって，等式の両辺を $(h + i)$ で割ることはできないはずである．

その理由を説明する．公理 4 で，新八元数の割り算 $A \div B$ は

$$A \div B = \frac{A\overline{B}}{|B|^2}$$

である．つまり，新八元数の割り算は， $(h + i)$ で割るのではなく $|h + i|^2$ で割らなければならない．このとき

$$\begin{aligned} |h + i|^2 &= (h + i)(h - i) \\ &= h^2 - i^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．等式の両辺を 0 で割ることができないことは数学の基本なので，(13.10) の両辺を $(h + i)$ で割ることはできないのである．絶対値が 0 になる新八元数は $(h + i)$ の他に $(h + j)$ ， $(h + k)$ ， $(h - i)$ など多数ある．

定理 26. 負の世界でも正の世界と同じ物理法則が成り立つ．

この定理は「11.5 負の世界の新八元数と新ローレンツ変換」で証明した．

定理 27. 2 次元時空の微分世界距離 dl は $dl = chdt\sqrt{1 - (dx)^2/(cdt)^2}$ である．

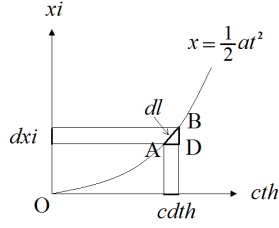


図 13.15

図 13.15 のように、2 次元時空で静止座標から見て x 軸方向に加速度 a で運動する質点の世界線の方程式は $x = at^2/2$ である。ただし、相対性理論では a は速度が遅いときのみ定数として扱う。 a が速度 v で変化する時の式は「**20.2 一般相対性理論**」で説明する。また、微積分学では、 $(dl)^2$ を dl^2 と表記するのが普通であるが、微積分学を習っていない高校生の読者を想定して $(dl)^2$ と書いた。

世界線 $x = at^2/2$ 上に、極めて近接した 2 点 A, B を仮定する。 AB 間の微小時間を dt 、微小距離を dx とすると、微小線分 AB を表す新八元数は $cdth + dxi$ なので、微小世界距離 dl は

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (cdth + dxi)(cdth - dxi) \\ &= c^2(dt)^2h^2 - (dx)^2i^2 \end{aligned} \quad (13.11)$$

である。 $cdt > dx$ 、つまり、 $c > dx/dt = v$ のときは、公理 9 で説明したように、 $\sqrt{\quad}$ の中を正にするために $cdth$ を $\sqrt{\quad}$ から出して

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{c^2(dt)^2h^2 - (dx)^2i^2} \\ &= cdth\sqrt{1 - (dxi)^2/(cdth)^2} \\ &= chdt\sqrt{1 - (dx)^2/(cdt)^2} \end{aligned} \quad (13.12)$$

になる。これが 2 次元時空における微分世界距離の式である。ユークリッド時空と異なり、(13.11) で $(dl)^2$ が $c^2(dt)^2h^2 + (dx)^2i^2$ にも $c^2(dt)^2 + (dx)^2$ にもならないことが重要である。世界線の方程式 $x = at^2/2$ から

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(at^2/2) \\ &= at \end{aligned}$$

なので、これを (13.12) に代入して

$$dl = chdt\sqrt{1 - (at/c)^2}$$

になる. A の座標を (ct_0, x_0) とすると, 原点 O から点 A までの世界線の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{t_0} chdt \sqrt{1 - (at/c)^2} \\ &= ch \int_0^{t_0} \sqrt{1 - (at/c)^2} dt \end{aligned} \quad (13.13)$$

になる. (13.13) が 2 次元時空における曲線 $x = at^2/2$ の世界距離の式である.

次に, 時間が存在しない 3 次元空間の微小距離の式を求めてみる. 3 次元空間で極めて近接した 2 点 A, B を仮定すると x, y, z 方向の微小成分は dx, dy, dz である. 線分 AB を表す新八元数は $dxi + dyj + dzk$ なので微小距離 dl は

$$\begin{aligned} (dl)^2 &= (dxi + dyj + dzk)(-dxi - dyj - dzk) \\ &= -(dxi)^2 - (dyj)^2 - (dzk)^2 \\ &= (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \\ dl &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \end{aligned} \quad (13.14)$$

になる. (13.14) は, 3 次元ユークリッド空間における微積分学の微小距離の式と同じである.

定理 28. ベクトル A と B を表す新八元数を A, B とすると, A, B と内積 $A \cdot B$, 外積 $A \times B$ の関係は

$$B\bar{A} = A \cdot B + A \times B$$

である.

この定理は「14.2 ベクトルと座標変換」で証明される.

定理 29. ベクトル A と B を表す新八元数を A, B とすると, 内積 $A \cdot B$ と外積 $A \times B$ は

$$A \cdot B = (B\bar{A} + A\bar{B})/2 \quad A \times B = (B\bar{A} - A\bar{B})/2$$

である.

この定理は「14.4 新八元数による 3 重積の計算」で証明される.

定理 30. ベクトル A, B, C を表す新八元数を A, B, C とすると, スカラー 3 重積 $A \cdot (B \times C)$ とベクトル 3 重積 $A \times (B \times C)$ は

$$(C\bar{B} - B\bar{C})\bar{A}/2 = A \cdot (B \times C) + A \times (B \times C)$$

である.

この定理は「14.4 新八元数による 3 重積の計算」で証明される.

定理 31. クロネッカーの δ_j^i (デルタ) は新八元数では 1 である.

この定理は「15.3 クロネッカーの δ 」で証明される.

定理 32. 時間は正の方向にしか進まない.

この定理は「3.6 時間が正の方向にしか進まない理由」で証明された.

定理 33. 光は静止質量を持たないが慣性の法則に従う.

この定理は「16.7 光と慣性の法則」で証明される.

定理 34. 正の世界では質量は虚数であり, 負の世界では質量は実数である.

この定理は「18.1 質量は単位世界線の時間成分である」で証明される.

定理 35. エネルギーは単位世界線 η (エータ) の時間成分を c^2 倍したものである. ただし, 質量を構成する世界線の本数 N をかけなければならない. また, 世界線の振幅 Ψ を掛けなければならない.

この定理は「18.2 エネルギーと運動量」で証明される. また, 「18.4 $E = mc^2$ の c の意味」で説明するが, 時間 t の代わりに相対性理論の時間 ct を使うと定理から c^2 が消えて, 「エネルギーは単位世界線の時間成分である」になる.

定理 36. 運動量は単位世界線 η の空間成分を c 倍したものである. ただし, 質量を構成する世界線の本数 N をかけなければならない. また, 世界線の振幅 Ψ を掛けなければならない.

この定理は「18.2 エネルギーと運動量」で証明される. また, 「18.4 $E = mc^2$ の c の意味」で説明するが, 時間 t の代わりに相対性理論の時間 ct を使うと定理から c が消えて, 「運動量は単位世界線の空間成分である」になる.

定理 37. エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は, 世界線の反射の法則である.

この定理は「20.3 世界線の反射と力」で証明される.

14. 新八元数とベクトル

14.1 ベクトルの基本事項

この章では、ベクトルを使った計算は新八元数を使って書き換えることができることを証明するのであるが、その前に、ベクトルの基本事項を復習する。

長さ、時間、質量などの大きさだけを持つ量をスカラーという。スカラーは数だけで表すことができる。これに対して、速度、加速度、力のように大きさと方向を持つ量をベクトルという。ベクトルは矢印で表される。矢の方向がベクトルの向きを表し、矢の長さがベクトルの大きさを表す。ベクトルは太文字で $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\dots$ のように書き、その大きさは $|\mathbf{A}|$, $|\mathbf{B}|$, $\dots$ で表される。

ベクトルの掛け算には、内積と外積の2種類がある。図 14.1 のように、平面上に2つのベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ があるとき、内積は $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ で表され、外積は $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ で表される。

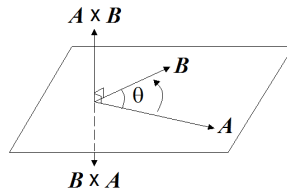


図 14.1

内積はスカラーであり、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る角を θ (シータ) とすると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (14.1)$$

で定義される。スカラーなので方向はない。

外積はベクトルであり、その大きさ $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ は

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (14.2)$$

で定義される。外積はベクトルなので方向を持ち、その向きはベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直である。垂直方向には図 14.1 のように上下の2方向があるが、ベクトル $\mathbf{A}$ から $\mathbf{B}$ に向かって回転したときに右ネジが進む方向をベクトル $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の正の方向とする。逆の方向を正の向きと定義することもできるが、一般的に右ネジが回転した

ときに進む方向を正とする． $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ については， $\mathbf{B}$ から $\mathbf{A}$ に向かって回転したときに右ネジが進む方向は $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とは逆になるので

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

が成り立つ．

外積の向きがベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直になる理由は，数学の本にも物理学の本にも書かれていない．ただ，定義しているだけで，その理論的根拠を明らかにしていない．計算がうまく行くからこの定義を使っているのも数学的に証明されていない．19 世紀末にベクトルが作られたときに，一部の数学者がベクトルを数学と認めなかった理由の一つはこれである．

これに対して，新八元数を使ってベクトルを書き換えると，必然的に外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の方向はベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直になる．つまり，新八元数を使えばベクトルの外積の向きを数学的に証明できる．このことを，「14.3 ベクトルの外積の向きと新八元数」で証明する．

また，正負の向きを決めるのは自由であり，一般的に右ネジが進む方向を $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の正の方向とするという内容も，数学的根拠がない．左に回して使う左ネジが進む方向を正の方向にしても，数学的矛盾が生じない．右ネジでも左ネジでもよいということは，「原論」を書いたユークリッドのように最少の公理を基に厳密な理論を作っていく人達からは，数学として認められないだろう．

どの本にも書かれていないので，正負の向きを決めるのは自由であるということの数学的根拠を説明する．図 14.2 のように 2 次元のユークリッド空間の x - y 座標を考える．座標軸の決め方には二通りあり，上方向を y 座標の正方向とすると， x 座標の正の方向を右方向にする場合と左方向にする場合が考えられる．二つの座標平面の関係は，鏡に映した場合と同じなので鏡面对称である．

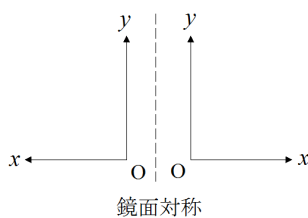


図 14.2

2 次元世界に住む生物は，この二つの座標平面を重ね合わせることはできない．なぜなら，彼らには 3 次元空間が存在しないので，座標平面を平面内で移動させることしかできないからである．これに反して，3 次元空間に住む生物は，2 次元平面を折り

たたむことによって、2種類の座標平面を重ね合わせることができる。つまり、2次元空間の2種類の x - y 座標平面は、2次元世界に住む生物にとっては異なるものであり、3次元空間に住む生物にとっては同じものである。

この考え方を、3次元空間と4次元時空に拡張する。3次元空間だけを考えると、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きは上下の2方向があり、それぞれは鏡面对称なので別のものである。しかし、4次元時空から見ると2種類の $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は重ね合わせることができるので同じものである。

「11.1 代数学の定理」で、数学的には1次元、2次元、4次元の3種類の時空しか存在できないことを説明した。3次元空間が単独で存在することはできないので、ベクトルは4次元時空で考えなければならない。相対性理論以外の現在の数学や物理学では、ベクトルを3次元空間で考えるので $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は2種類あるように見えるが、4次元時空から見れば一つである。つまり、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は4次元空間に存在するので、3次元空間で外積の向きの正負を入れ替えても数学的矛盾は生じないのである。

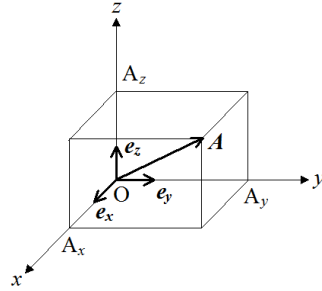


図 14.3

次に、座標成分によるベクトルの記述法を説明する。図 14.3 のように、3次元空間における x , y , z 座標軸上の長さ1のベクトルを基本ベクトルといい、 $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ で表す。このとき、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の x , y , z 軸成分を A_x , A_y , A_z および B_x , B_y , B_z とすると

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z \quad (14.3)$$

と書くことができる。内積の定義

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (14.1)$$

と $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$ から、基本ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ の内積は

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = 1, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1 \quad (14.4)$$

$$\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0, \quad \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z = 0, \quad \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0 \quad (14.5)$$

である．よって，内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ の座標成分表示は (14.3), (14.4), (14.5) から

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \cdot (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z\end{aligned}\quad (14.6)$$

になる．

また，外積の定義

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (14.2)$$

と $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, および，右ネジの規則から，基本ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ の外積は

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = 0, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = 0, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = 0 \quad (14.7)$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \quad (14.8)$$

$$\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y \quad (14.9)$$

である．よって，外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の座標成分表示は (14.3), (14.7), (14.8), (14.9) から

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \times (B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z) \\ &= A_x B_y \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y + A_x B_z \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z \\ &\quad + A_y B_x \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x + A_y B_z \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x + A_z B_y \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y \\ &= A_x B_y \mathbf{e}_z - A_x B_z \mathbf{e}_y \\ &\quad - A_y B_x \mathbf{e}_z + A_y B_z \mathbf{e}_x \\ &\quad + A_z B_x \mathbf{e}_y - A_z B_y \mathbf{e}_x \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

になる．結果をまとめると

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (14.10)$$

である．

先にベクトルは 4 次元時空で考えなければならないと説明したが，時間軸上の基本ベクトル $\mathbf{e}_t$ と 3 次元空間の基本ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ が作る角度が不明なので，4 次元時空における内積と外積の座標成分による計算式は正確かどうか不明である．そこで，「14.6 新八元数と 4 次元ベクトル」で，新八元数を使って 4 次元時空における内積と外積の座標成分表示を計算する．また，(14.6) と (14.10) は 4 次元時空における内積と外積の座標成分表示で時間 t を 0 にした時の式であることも証明する．

14.2 ベクトルと座標変換

この単元では、内積と外積を含めたベクトルの掛け算は座標変換であることを証明する。つまり、ベクトル A にベクトル B を掛けることは、ベクトル B をベクトル A の座標に変換することである。また、ベクトルの掛け算が座標変換なので、内積と外積を新八元数で書き換えることができる。このことはベクトルの本には書かれていない。

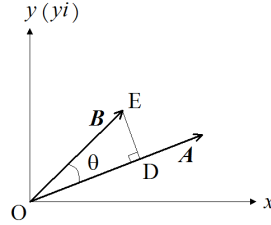


図 14.4

図 14.4 のように x - y 平面上のベクトル A , B を考える。ベクトル B の先端 E からベクトル A に引いた垂線の A との交点を D とする。線分 OD と DE の長さを $|OD|$ と $|DE|$ と書く。ベクトルの内積と外積の定義

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta \quad (14.1)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (14.2)$$

から

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |OD|$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |DE|$$

である。式を変形して

$$|OD| = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} \quad (14.11)$$

$$|DE| = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} \quad (14.12)$$

になる。図 14.4 の座標平面を、 x 軸を実数、 y 軸を虚数軸とする複素平面と考え、ベクトル A , B を表す複素数を A , B とする。「2.2 複素数による座標変換の一般式」で説明したように、複素数の座標変換 $B\bar{A}/|A|$ は A の視点から B がどう見えるかを表し

$$\frac{B\bar{A}}{|A|} = |OD| + |DE|i$$

である。この式に、(14.11) と (14.12) を代入すると

$$\frac{B\bar{A}}{|A|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} + \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}i$$

になる. ベクトル $\mathbf{A}$ の大きさ $|\mathbf{A}|$ と複素数 A の大きさ $|A|$ は同じなので

$$\frac{B\bar{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} + \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} i$$

と書くことができる. 両辺に $|\mathbf{A}|$ を掛けて

$$B\bar{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| i \quad (14.13)$$

になる. (14.13) から, 複素数の座標変換 $B\bar{A}/|\mathbf{A}|$ を $|\mathbf{A}|$ 倍すると, ベクトルの内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ と外積の大きさ $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ が同時に現れることがわかる. つまり, 内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ はベクトル $\mathbf{A}$ に平行なベクトル $\mathbf{B}$ の成分に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものであり, 外積の大きさ $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ はベクトル $\mathbf{A}$ に垂直なベクトル $\mathbf{B}$ の成分に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものなので, 内積と外積を合わせたベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の掛け算は, $\mathbf{A}$ による $\mathbf{B}$ の座標変換に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものになる. 別の言い方では, ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の掛け算は $\mathbf{A}$ による $\mathbf{B}$ の見え方を $|\mathbf{A}|$ 倍したものである.

(14.13) は 2 次元平面で考えているので, $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| i$ の向きが 3 次元空間における外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きと一致しない. そこで, 上の理論を 3 次元空間に拡張する.

非ユークリッド 4 次元時空の正の世界の新八元数 $cth + xi + yj + zk$ で時間 t を 0 にすると, 3 次元空間成分は $xi + yj + zk$ になる. そこで, 3 次元空間のベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を表す新八元数 A と B を

$$A = A_x i + A_y j + A_z k, \quad B = B_x i + B_y j + B_z k \quad (14.14)$$

と書く. なお, ユークリッド 4 次元時空のハミルトンの四元数でも 3 次元空間成分は $xi + yj + zk$ なので, (14.14) は空間の曲がりに関係なく成り立つ. (14.14) から

$$\begin{aligned} B\bar{A} &= (B_x i + B_y j + B_z k)(-A_x i - A_y j - A_z k) \\ &= -B_x A_x i^2 - B_x A_y i j - B_x A_z i k \\ &\quad - B_y A_x j i - B_y A_y j^2 - B_y A_z j k \\ &\quad - B_z A_x k i - B_z A_y k j - B_z A_z k^2 \\ &= B_x A_x - B_x A_y k + B_x A_z j \\ &\quad + B_y A_x k + B_y A_y - B_y A_z i \\ &\quad - B_z A_x j + B_z A_y i + B_z A_z \\ &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &\quad + (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \end{aligned} \quad (14.15)$$

である. 先に説明したベクトルの外積の座標成分表示

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{e}_z \quad (14.10)$$

の基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は虚数 i, j, k と同じ大きさと向きなので

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \quad (14.16)$$

と書くことができる. (14.16) の左辺はベクトルであり右辺はスカラーなので等号を使うことはできないと考えるかもしれないが, 両辺の意味が同じなので今後この表記法を使う.

(14.15), (14.16) とベクトルの内積の座標成分表示

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.6)$$

から

$$B\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

になる. (14.17) は 2 次元平面の式

$$B\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|i \quad (14.13)$$

を 3 次元空間に拡張した式である. (14.17) から, 3 次元空間でもベクトルの内積と外積が $B\bar{\mathbf{A}}$ で同時に計算できることと, 内積と外積を合わせたベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の掛け算は, $\mathbf{A}$ による $\mathbf{B}$ の座標変換に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものであることがわかる. 別の言い方では, 3 次元空間でもベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の掛け算は $\mathbf{A}$ による $\mathbf{B}$ の見え方を $|\mathbf{A}|$ 倍したものである.

ベクトルの内積と外積が座標変換であることを, 別の方法で証明することができる. 内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ はベクトル $\mathbf{A}$ に平行なベクトル $\mathbf{B}$ の成分に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものであり, 外積の大きさ $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ は $\mathbf{A}$ に垂直な $\mathbf{B}$ の成分に $|\mathbf{A}|$ を掛けたものであるということと, 座標変換後の $\mathbf{B}$ の大きさ $|\mathbf{B}|$ は変化しないということから三平方の定理を使って

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2}{|\mathbf{A}|^2} + \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2}{|\mathbf{A}|^2} &= |\mathbf{B}|^2 \\ |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{A}|^2 \end{aligned} \quad (14.18)$$

が成り立つはずである. 内積と外積の座標成分表示が (14.18) を満たすことを証明する.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.9)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \quad (14.16)$$

を (14.18) の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2 \\ &\quad + [(A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k] \\ &\quad \times [-(A_y B_z - A_z B_y)i - (A_z B_x - A_x B_z)j - (A_x B_y - A_y B_x)k] \end{aligned}$$

である. 式が多くなるので計算を省略するが, この式の右辺を計算すると,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 &= (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2) \\ &= |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{A}|^2 \end{aligned}$$

になる.

14.3 ベクトルの外積の向きと新八元数

「14.1 ベクトルの基本事項」で「ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きが $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直になる理由は, 数学の本にも物理学の本にも書かれていない. 定義しているだけで, その理論的根拠を明らかにしていない」と書いた. この單元では

$$\begin{aligned} B\bar{\mathbf{A}} &= (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &\quad + (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k \end{aligned} \quad (14.15)$$

と

$$B\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

を使ってベクトルを新八元数で書き換えると, 必然的に外積の向きはベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直になることを証明する.

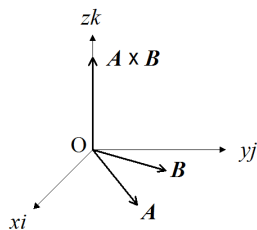


図 14.5

図 14.5 のようにベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が $xi-yj$ 平面内にあるとすると, $A_z = B_z = 0$ なので (14.15) は

$$B\bar{\mathbf{A}} = (A_x B_x + A_y B_y) + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

になる. この式と (14.17) から

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_x + A_y B_y) + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

である. スカラー $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ は方向を持たず, ベクトル $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は方向を持つので

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y \quad (14.19)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x B_y - A_y B_x)k \quad (14.20)$$

と考えられる. (14.20) は zk 軸の虚数 k を持つので, ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が $xi-yj$ 平面にあるとき, 外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きは zk 軸方向になることを示している.

これはベクトルの外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きの数学的証明であって, 他の数学や物理学の本のように定義したのではない. ベクトルの数学が作られる過程で, 外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の向きをベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直にすると計算がうまくいくことがわかり, その向きが定義されたのであるが, 上の方法で数学的に証明された.

(14.19) でベクトルの内積 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ には虚数 h, i, j, k がついていないので, 内積は負の世界の時間成分であることを示している. このことについて, 「14.6 新八元数と 4 次元ベクトル」で説明する.

14.4 新八元数による 3 重積の計算

今までの説明では二つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を使ったが, 三つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を使った計算を 3 重積という. その中で, スカラー 3 重積 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ とベクトル 3 重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ が重要である. この単元では 3 重積を新八元数で書き換えることができることを示す.

ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ の (x, y, z) 成分をハミルトンの表記法により

$$(A_x, A_y, A_z), (B_x, B_y, B_z), (C_x, C_y, C_z)$$

とし, x, y, z 軸上の大きさ 1 の基本ベクトルを $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ とすると

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y + B_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{C} = C_x \mathbf{e}_x + C_y \mathbf{e}_y + C_z \mathbf{e}_z$$

と表される.

ベクトルの本に書かれているので計算は省略するが, 基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の内積と外積の値 (14.4), (14.5), (14.7), (14.8), (14.9) を使って計算すると, スカラー 3 重積は

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \quad (14.21)$$

である. また, ベクトル 3 重積は

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= [(A_y C_y + A_z C_z) B_x - (A_y B_y + A_z B_z) C_x] \mathbf{e}_x \\ &\quad + [(A_z C_z + A_x C_x) B_y - (A_z B_z + A_x B_x) C_y] \mathbf{e}_y \\ &\quad + [(A_x C_x + A_y C_y) B_z - (A_x B_x + A_y B_y) C_z] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (14.22)$$

になる.

次に, 3 重積を表す新八元数の式を求める. ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を表す新八元数を A, B, C とすると, 「14.2 ベクトルと座標変換」で求めた式

$$B\overline{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

から

$$C\overline{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (14.23)$$

$$B\overline{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{C} \times \mathbf{B} \quad (14.24)$$

である. 外積の定義から

$$\mathbf{C} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{C}$$

なので, (14.24) は

$$B\overline{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathbf{C} \quad (14.25)$$

になる. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}$ なので (14.23) から (14.25) を辺々引くと

$$C\overline{B} - B\overline{C} = 2(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

になり

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = (C\overline{B} - B\overline{C})/2 \quad (14.26)$$

である. また, (14.23) に (14.26) を辺々足すと

$$C\overline{B} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C} + (C\overline{B} - B\overline{C})/2$$

になり

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (C\overline{B} + B\overline{C})/2 \quad (14.27)$$

である. (14.26) と (14.27) を 「13.3 新八元数の定理」 の 「定理 28」 にした.

この単元の目的は, 3 重積を表す新八元数の式を求めることなので証明を進める. 考えやすくするために $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ と書くと, (14.26) は

$$\mathbf{D} = (C\overline{B} - B\overline{C})/2$$

である. ベクトル $\mathbf{D}$ と新八元数 D は同じと考えられるので

$$D = (C\overline{B} - B\overline{C})/2 \quad (14.28)$$

になる. 「14.2 ベクトルと座標変換」で求めた式

$$B\overline{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

から

$$D\overline{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{A} \times \mathbf{D}$$

なので、この式に $\mathbf{D} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ と (14.28) を代入して

$$(\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \quad (14.29)$$

になる. (14.29) が 3 重積と新八元数の関係式であり、次のように使う.

- (1) ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ の座標成分から新八元数を A , B , C を作る.
- (2) $(\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2$ を計算する.
- (3) $(\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2$ の実数項がスカラー 3 重積 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ であり、虚数項がベクトル 3 重積 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ である.

二つのベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ のときと同じように (14.29) でベクトルの内積と外積は同時に現れる. 便利であるという理由で、外積やスカラー 3 重積を使って面積や体積を計算することがあるが、ベクトルの掛け算は本質的には座標変換であるので、新八元数で計算すると内積と外積が同時に現れるのである.

(14.29) が正しいことは以下の方法で証明される. $(\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2$ に

$$A = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_x i + B_y j + B_z k$$

$$C = C_x i + C_y j + C_z k$$

を代入すると、計算は省略するが

$$\begin{aligned} & (\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2 \\ &= [(C_x i + C_y j + C_z k)(-B_x i - B_y j - B_z k) - (B_x i + B_y j + B_z k)(-C_x i - C_y j - C_z k)] \\ & \quad \times (-A_x i - A_y j - A_z k)/2 \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ & \quad + [(A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_y B_y + A_z B_z)C_x]i \\ & \quad + [(A_z C_z + A_x C_x)B_y - (A_z B_z + A_x B_x)C_y]j \\ & \quad + [(A_x C_x + A_y C_y)B_z - (A_x B_x + A_y B_y)C_z]k \end{aligned}$$

になる. この式に、以前に説明した 3 重積の成分表示

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \quad (14.21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= [(A_y C_y + A_z C_z)B_x - (A_y B_y + A_z B_z)C_x]\mathbf{e}_x \\ & \quad + [(A_z C_z + A_x C_x)B_y - (A_z B_z + A_x B_x)C_y]\mathbf{e}_y \\ & \quad + [(A_x C_x + A_y C_y)B_z - (A_x B_x + A_y B_y)C_z]\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (14.22)$$

を代入して

$$(\overline{C\mathbf{B}} - \overline{B\mathbf{C}})\overline{\mathbf{A}}/2 = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$$

になる。ただし、基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は i, j, k と同じ内容を表すので互いに入れ替えても良いと考えられる。

14.5 新八元数による 4 重積の計算

3 重積を求めたときの方法を使って、四つのベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ があるときの 4 重積と新八元数の関係式も求めることができる。スカラー 4 重積とベクトル 4 重積の和は

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

である。公式

$$Q\overline{P} = P \cdot Q + P \times Q$$

から

$$\{\mathbf{C} \times \mathbf{D}\} \{\overline{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}\} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) \quad (14.30)$$

になる。ただし、左辺の $\{\mathbf{C} \times \mathbf{D}\}$ はベクトル $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ を表す新八元数であり、 $\{\overline{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}\}$ はベクトル $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ を表す新八元数 $\{\mathbf{A} \times \mathbf{B}\}$ の共役新八元数とする。

公式

$$\{\mathbf{B} \times \mathbf{C}\} = (\mathbf{C}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\overline{\mathbf{C}})/2 \quad (14.26)$$

から

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A} \times \mathbf{B}\} &= (\mathbf{B}\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{B}})/2 \\ \{\mathbf{C} \times \mathbf{D}\} &= (\mathbf{D}\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\overline{\mathbf{D}})/2 \end{aligned} \quad (14.31)$$

である。また、公式 $\overline{PQ} = \overline{Q} \overline{P}$ から $\mathbf{B}\overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}\overline{\mathbf{B}}$ の共役新八元数は $\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\overline{\mathbf{A}}$ なので

$$\{\overline{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}\} = (\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\overline{\mathbf{A}})/2 \quad (14.32)$$

である。(14.31) と (14.32) を (14.30) の左辺に代入して

$$(\mathbf{D}\overline{\mathbf{C}} - \mathbf{C}\overline{\mathbf{D}})(\mathbf{A}\overline{\mathbf{B}} - \mathbf{B}\overline{\mathbf{A}})/4 = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D})$$

になる。これが 4 重積と新八元数の関係式である。

14.6 新八元数と 4 次元ベクトル

今までの議論は時間成分を 0 にして 3 次元空間で考えた。この單元では正負の二つの世界を含む非ユークリッド 4 次元時空全体におけるベクトルの内積と外積を調べる。

正の世界の4次元ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ の (ct, x, y, z) 座標成分を

$$(A_t h, A_x i, A_y j, A_z k), (B_t h, B_x i, B_y j, B_z k)$$

とすると, ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ を表す新八元数 A , B は

$$A = A_t h + A_x i + A_y j + A_z k$$

$$B = B_t h + B_x i + B_y j + B_z k$$

である. 公式

$$B\bar{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

が4次元時空でも成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} B\bar{A} &= (B_t h + B_x i + B_y j + B_z k)(A_t h - A_x i - A_y j - A_z k) \\ &= B_t A_t h^2 - B_t A_x h i - B_t A_y h j - B_t A_z h k \\ &\quad + B_x A_t h i - B_x A_x i^2 - B_x A_y i j - B_x A_z i k \\ &\quad + B_y A_t h j - B_y A_x j i - B_y A_y j^2 - B_y A_z j k \\ &\quad + B_z A_t h k - B_z A_x k i - B_z A_y k j - B_z A_z k^2 \\ &= -B_t A_t - B_t A_x h i - B_t A_y h j - B_t A_z h k \\ &\quad + B_x A_t h i + B_x A_x - B_x A_y k + B_x A_z j \\ &\quad + B_y A_t h j + B_y A_x k + B_y A_y - B_y A_z i \\ &\quad + B_z A_t h k - B_z A_x j + B_z A_y i + B_z A_z \\ &= (-B_t A_t + B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z) \\ &\quad + (B_x A_t - B_t A_x) h i + (B_y A_t - B_t A_y) h j + (B_z A_t - B_t A_z) h k \\ &\quad + (B_z A_y - B_y A_z) i + (B_x A_z - B_z A_x) j + (B_y A_x - B_x A_y) k \\ &= (-A_t B_t + A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ &\quad + (A_t B_x - A_x B_t) h i + (A_t B_y - A_y B_t) h j + (A_t B_z - A_z B_t) h k \\ &\quad + (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \end{aligned}$$

なので

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A_t B_t + A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_t B_x - A_x B_t) h i + (A_t B_y - A_y B_t) h j + (A_t B_z - A_z B_t) h k \\ &\quad + (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k \end{aligned} \quad (14.34)$$

になる. (14.33) と (14.34) が4次元ベクトルの内積と外積の座標成分による計算式で

ある. この式で時間成分 A_t と B_t を 0 にすると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k$$

になり, 3次元ベクトルの内積と外積の式

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.6)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{e}_z \quad (14.10)$$

と一致する. ただし, (14.10) では虚数 i, j, k の代わりに基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ を使っている.

(14.34) 式は記憶しにくいので, 行列式で書き直すが, その前行列式の計算規則を簡単な例を使って説明する. 行列式では右斜め下の項は掛けて足し, 左斜め下の項は掛けて引くので

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 a_4 - a_2 a_3$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)i + (a_3 b_1 - a_1 b_3)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

のようになる.

よって, 行列式を使って (14.34) を書き直すと以下のようになる.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & \begin{vmatrix} A_t & A_x \\ B_t & B_x \end{vmatrix} hi + \begin{vmatrix} A_t & A_y \\ B_t & B_y \end{vmatrix} hj + \begin{vmatrix} A_t & A_z \\ B_t & B_z \end{vmatrix} hk \\ & + \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} k \end{aligned} \quad (14.35)$$

(14.35) の i, j, k 項は次のように書き換えることもできる. すなわち

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

であるが, この行列式では hi, hj, hk 項との関係がわかりにくいので, (14.35) のように書いた.

「11.4 2 重構造を持つ 4 次元時空」で説明したように, 新八元数では実数項は負の世界の時間成分を表すので

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = -A_t B_t + A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.33)$$

から4次元時空におけるベクトルの内積は負の世界の時間成分である。我々は負の世界の時間成分を観測することはできないので、ベクトルの掛け算のときに外積のみを観測することになる。このことが、ベクトルの内積と外積を別々のものと考えてきた原因の一つではないかと考えられる。

また

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & (A_t B_x - A_x B_t)hi + (A_t B_y - A_y B_t)hj + (A_t B_z - A_z B_t)hk \\ & + (A_y B_z - A_z B_y)i + (A_z B_x - A_x B_z)j + (A_x B_y - A_y B_x)k\end{aligned}\quad (14.34)$$

は hi , hj , hk 項を持つので、外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は正負の両方の世界の空間成分であることがわかる。内積の場合と同様に我々は負の世界の空間成分を観測できないので、(14.34) 式の hi , hj , hk 項を0にした時の式を今まで外積の定義にしてきたと考えられる。

非ユークリッド4次元時空における内積と外積の正しい計算式は、(14.33) と (14.34) である。これに対して、ユークリッド4次元時空の数学であるハミルトンの四元数は、新八元数の虚数 h を1にしたものなので、(14.33) と (14.34) は次のように書き換えられる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_t B_t + A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (14.35)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} = & \begin{vmatrix} A_t & A_x \\ B_t & B_x \end{vmatrix} i + \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} i \\ & + \begin{vmatrix} A_t & A_y \\ B_t & B_y \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} j \\ & + \begin{vmatrix} A_t & A_z \\ B_t & B_z \end{vmatrix} k + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} k\end{aligned}\quad (14.36)$$

ユークリッド4次元時空には負の世界がないので、正の世界で、(14.35) は時間成分を (14.36) は空間成分を表す。理解しやすい式であるが、この式が成り立つ世界では相対性理論は成り立たない。そこで、ベクトルを使った計算は近似計算になってしい宇宙の真理を知ることはできない。相対性理論の正しさを認めるならば、(14.33) と (14.34) を4次元時空におけるベクトルの内積と外積の計算式として使うべきである。

(14.33) と (14.34) や (14.35) と (14.36) の正しさは「**14.2 ベクトルと座標変換**」で説明したように、座標成分による表示が

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{B}|^2 |\mathbf{A}|^2$$

を満たすことで証明されるが、計算は省略する。

今まで説明したように、ベクトルの計算は新八元数で書き換えることができる。ベクトルは物理学の広い範囲で使われているので、ベクトルで書かれた物理学の公式を新八元数で書き換える仕事が残っている。また、現在のベクトル解析はユークリッド

3次元空間の数学なので、新八元数による内積と外積の式(14.33)と(14.34)を使って非ユークリッド4次元時空の数学に書き換えられなければならない。

14.7 回転を表すベクトルと新八元数

この单元では、ベクトルで書かれた物理学の公式を新八元数で書き直す方法を、回転ベクトルの例を使って説明する。まず、回転の表し方を説明する。

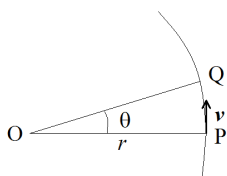


図 14.6

図 14.6 のように半径 r の円周上の質点 A が点 P から点 Q に移動したと仮定する。このとき、点 P と Q が原点 O と作る角を θ (シータ) とすると、質点が移動した弧の長さ l は

$$l = r\theta \quad (14.37)$$

となる。ただし、 θ の単位は度ではなくラジアンである。ラジアンは、半径 1 の円の中心角が作る弧の長さで角度を表した単位である。質点の移動時間を微小時間 dt とすると、 θ は微小角度 $d\theta$ になり、弧 l も微小距離 dl になる。よって、(14.37) は

$$dl = rd\theta$$

になる。この式の両辺を微小時間 dt で割ると

$$\frac{dl}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \quad (14.38)$$

になる。 dl/dt は回転する質点の点 P における速度 v であり、その向きは円の接線方向である。また、 $d\theta/dt$ は角度の時間あたりの変化量なので角速度 ω (オメガ) になる。よって、(14.38) は

$$v = r\omega$$

である。後で説明するベクトルによる関係式(14.40)と一致させるために

$$v = \omega r \quad (14.39)$$

と書くことにする。

日本では高等学校で物理学を習うときにはベクトルは出て来ないが、大学では物理学はベクトルで教えられる。大学で物理学を学ぶ学生が最初に戸惑うのは回転を表すベクトルである。このベクトルは次のように定義される。

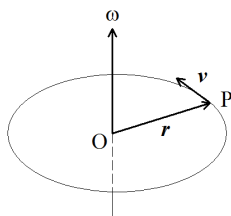


図 14.7

図 14.7 のように回転中心 O を起点とする円周上の点 P の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とし、点 P での速度ベクトルを $\mathbf{v}$ とすると、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ の関係は

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

である。また、 $\boldsymbol{\omega}$ の向きはベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が作る平面に垂直である。つまり、 $\boldsymbol{\omega}$ の向きは回転平面に垂直なので回転軸方向である。軸の向きは上下 2 方向があるが、ベクトル $\mathbf{r}$ から $\mathbf{v}$ の方向に右ネジを回すときにネジが進む方向を $\boldsymbol{\omega}$ の向きにする。図 14.7 では上向きである。

学生が角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の定義に戸惑う理由は、回転は平面内で行われているのに、ベクトルの向きが回転方向と無関係な垂直方向であることである。力や速度を表すベクトルは、力や速度の向きとベクトルの向きが一致しているのに、回転の向きと角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の向きが一致していない。そして、どの物理学の本の著者も、なぜ角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が回転平面に垂直になるのかは説明していない。ただ定義するだけである。それはちょうど、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の外積の向きが $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直であることを理由を説明せずに定義しているのと同じである。矛盾が生じないし便利であるという理由だけで定義することは数学的ではないし論理的でもない。

「14.3 ベクトルの外積の向きと新八元数」で、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の外積の向きが $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が作る平面に垂直になることを新八元数を使って数学的に証明したが、同様に、角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の向きがベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が作る平面に垂直になることを、新八元数を使って証明する。

(14.39) で ω を角速度と考えずに「 ω はベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ の関係を表す未知の関数である」と仮定する。 $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ はベクトルで ω はベクトルではないので、(14.39) は

$$\mathbf{v} = \omega \mathbf{r} \tag{14.40}$$

になる．ベクトルは新八元数で書き換えられるので座標成分で表すと $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ の新八元数は

$$\begin{aligned} v &= v_x i + v_y j + v_z k \\ r &= x i + y j + z k \end{aligned}$$

である．つまり (14.40) は

$$(v_x i + v_y j + v_z k) = \omega (x i + y j + z k)$$

になる．この式が回転を表す新八元数の関係式である．

計算を楽にするために座標成分表示を新八元数そのものに戻すと

$$v = \omega r \quad (14.41)$$

である．(14.39) と (14.41) は同じ式であるが，(14.39) は実数の式であり，(14.41) は新八元数の式で「 ω はベクトル $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ の関係を表す未知の関数である」と考えた点が異なっている．

(14.41) の両辺に右から $\bar{r}$ を掛けて

$$\begin{aligned} v \bar{r} &= \omega r \bar{r} \\ &= \omega |r|^2 \end{aligned}$$

になるので， $r \neq 0$ のとき

$$\omega = \frac{v \bar{r}}{|r|^2} \quad (14.42)$$

である．「**14.2 ベクトルと座標変換**」で証明した新八元数とベクトルの関係式

$$B \bar{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

から

$$v \bar{r} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

なので，(14.42) は

$$\omega = \frac{1}{|r|^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (14.43)$$

になる．

半径 r が一定のとき，つまり，円が楕円ではないとき， $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ の作る角は直角，つまり， $\pi/2$ ラジアンなので内積の定義から

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{r}| |\mathbf{v}| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

である。よって, (14.43) は半径 r が一定のとき

$$\omega = \frac{1}{|r|^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

になる。 ω は新八元数なのでベクトルと同じと考えてよいので, 角速度ベクトル ω と $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ の関係は

$$\omega = \frac{1}{|r|^2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (14.44)$$

である。

ベクトルの外積の公式から, 角速度ベクトル ω は $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ が作る平面に垂直であることを (14.44) は示している。これが角速度ベクトル ω の向きの数学的証明である。

なお, 円が楕円のときは内積 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ は 0 ではないので, 角速度ベクトル ω は回転平面に垂直な空間成分に加えて負の世界の時間成分 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ を持っている。

また, 直線運動で $\mathbf{r}$ と $\mathbf{v}$ の向きが同じ時は $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = |r||v|$, $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$ なので, t を時間とすると

$$\omega = \frac{1}{|r|^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (14.43)$$

は

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{|r|^2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{|r|^2} |r| |v| \\ &= \frac{|v|}{|r|} \\ &= \frac{|r|/t}{|r|} \\ &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} v &= \omega r \\ &= \frac{r}{t} \end{aligned}$$

になる。これは直線運動における距離と速度の関係式である。

以上の結果から,

$$\omega = \frac{1}{|r|^2}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (14.43)$$

は, 3次元空間における位置ベクトルと速度ベクトル, 角速度の一般関係式である。

また, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ を 3次元ベクトルではなく 4次元ベクトルと考えても (14.43) は成り立つので, 4次元時空における回転軸を表す新八元数も計算できると考えられる。

15. 新八元数とテンソル

15.1 テンソルが作られた理由

テンソルは高校では習うことがなく大学の理工系の学部で3年生になって初めて習うので、テンソルを知らない一般の読者や大学生は多いと思われる。しかし、工学部と理学部では、これを使わずに研究をすることは不可能である。工学部では、物体の「ひずみ」の計算にテンソルを使う。また、重力に関するアインシュタインの理論である「一般相対性理論」もテンソルで書かれている。

このように現代の理工学で大事なテンソルであるが、最初から理解できる学生は少ない。その理由として、次の二点が考えられる。

- (1) テンソルが作られた理由を説明した本が少ない。
- (2) テンソルと結びつく具体的な像がない。

テンソルについて書かれた大部分の本では、まず最初にテンソルの定義が説明され、次にテンソルの例と公式が説明される。なぜテンソルが必要かについては書かれることがない。中学校で虚数を習うときに、2乗して-1になる数を説明するために虚数*i*が考えられたことが説明される。また、三角関数は三角形の角度から辺の長さを計算するために必要であることはすぐに理解できる。ベクトルは方向を持った数を説明するために作られた。このようにテンソル以外の数学は、それが生まれた理由が理解できるが、テンソルについては説明されることがない。これが、テンソルの理解を困難にしている理由の一つである。

テンソルの理解を困難にしているもう一つの理由は、テンソルと具体的な像が結びつかないことである。先に述べた虚数は複素平面上の点として描くことができる。また、三角関数は三角形で表され、ベクトルは矢印で表される。どの数も像として見るができるが、テンソルを図に描くことはできない。

円周率のような規則性のない数を数百も覚える記憶術では、数を具体的な情景や物語に当てはめて覚える。人間が理解し記憶するためには具体的な像が必要であるがテンソルには像がないため理解を困難にしているのである。そこで、この単元ではテンソルが作られた理由と図で表現できない理由を説明する。この説明は、次の単元「**15.2 テンソルの限界と新八元数による解決**」を理解するために必要である。

高等学校でベクトルを習ったときに賢明な学生はあることに気づいただろう。それは、ベクトルには割算がないということである。ベクトルの割算を習った人はいないはずである。実数も虚数も三角関数も割算ができるので、ベクトルで割算ができなければベクトルは不完全な数学になってしまう。ベクトルをベクトルで割ることができ

ないので、それを補う方法としてテンソルが考え出されたのである。

割算をまず実数で考える。 x と y を実数とするとき

$$y = ax$$

は、 x と y の関係を表す。 $x \neq 0$ のとき、両辺を x で割って

$$a = \frac{y}{x}$$

のように a を求めることができる。

さらに、 $x = 1$, $y = 2$ のとき

$$a = \frac{2}{1} = 2$$

である。 よって、 $y = ax$ は

$$y = 2x$$

となる。 この式に $x = 3$ を代入すると

$$y = 6$$

になり、 $y = 2x$ において実数 1 と 2 の関係は 3 と 6 の関係と同じであるといえることができる。

同じことを、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ について考えてみる。 ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ に次の関係があると仮定する。

$$\mathbf{B} = T\mathbf{A} \quad (15.1)$$

T はテンソルの頭文字である。 現時点で、 T がどんな数であるかは不明である。

「14.1 ベクトルの基本事項」で説明したように、ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ を座標成分 (A_x, A_y, A_z) , (B_x, B_y, B_z) と基本ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ で表すと、(15.1) は

$$B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z = T(A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z) \quad (15.2)$$

になる。 この両辺を $A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$ で割ることができると仮定すると

$$T = \frac{B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z}{A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z} \quad (15.3)$$

になる。

(15.3) の分母の基本ベクトル $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ を消すために、あるベクトルを分母分子に掛けようとしても、ベクトルには内積と外積があるため何を掛けたらよいかわからない。 そこで、(15.3) はこのままにしておく。

次に, (15.3) を使ってベクトル $\mathbf{C}(C_x, C_y, C_z)$ から導かれるベクトル $\mathbf{D}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= T\mathbf{C} \\ &= \frac{B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z}{A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z} \times (C_x\mathbf{e}_x + C_y\mathbf{e}_y + C_z\mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

になる. この式でも基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ の掛け算が内積か外積か不明なので, これ以上の計算は不可能である. つまり, ベクトル $\mathbf{D}$ を計算できないので, ベクトルをベクトルで割ることはできないと考えられる.

ベクトル $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の関係 T をベクトル $\mathbf{C}$ に当てはめてベクトル $\mathbf{D}$ を求めることができなければ, ベクトルは不完全な数学になってしまう. この問題を解決するためにテンソルが作られたのである. そこで, テンソルによる解決法を説明する.

(15.2) で B_x が A_x, A_y, A_z の 1 次関数であり, B_y が A_x, A_y, A_z の 1 次関数, B_z が A_x, A_y, A_z の 1 次関数である場合を考える. 1 次関数とは 2 次関数 A_x^2 や 3 次関数 A_x^3 などを含まないという意味である. このとき, (15.2) は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned}B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z &= (a_1A_x + a_2A_y + a_3A_z)\mathbf{e}_x \\ &\quad + (b_1A_x + b_2A_y + b_3A_z)\mathbf{e}_y \\ &\quad + (c_1A_x + c_2A_y + c_3A_z)\mathbf{e}_z\end{aligned}\tag{15.4}$$

この式では計算が大変なので, 行列を使うことにする. 行列の掛け算を簡単に説明する. 二つの行列の掛け算は以下のようになる.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1A_x + a_2A_y + a_3A_z \\ b_1A_x + b_2A_y + b_3A_z \\ c_1A_x + c_2A_y + c_3A_z \end{pmatrix}$$

この行列の掛け算を使うと (15.4) は次のように書き換えられる.

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\tag{15.5}$$

(15.5) と

$$\mathbf{B} = T\mathbf{A}\tag{15.1}$$

を比較すると

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\tag{15.6}$$

になる。これがテンソル T である。

このテンソル T を使えばベクトル $\mathbf{C}$ からベクトル $\mathbf{D}$ を作ることができる。 $\mathbf{D} = T\mathbf{C}$ なので

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 C_x + a_2 C_y + a_3 C_z \\ b_1 C_x + b_2 C_y + b_3 C_z \\ c_1 C_x + c_2 C_y + c_3 C_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

になる。以上の結果から、ベクトルの割算ができないので、ベクトルとベクトルの関係を表すためにテンソルが作られたことが理解できる。

テンソルがベクトルとベクトルの関係を表すことが理解できれば、テンソルを図に描くことができないことも理解できる。三角形を四角形に変換する関係式があると仮定すると、三角形と四角形は図に描くことはできるが関係式は図にできない。同様に、ベクトルは図に描くことはできるが、関係を表すテンソルは図にすることはできないのである。

以上のように、ベクトルの割算ができないためにテンソルを作ったのであるが、新八元数で計算すると割算を使ってベクトル $\mathbf{D}$ を計算することができる。

ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ を新八元数で表すと

$$\mathbf{A} = A_x i + A_y j + A_z k, \quad \mathbf{B} = B_x i + B_y j + B_z k, \quad \mathbf{C} = C_x i + C_y j + C_z k \quad (15.7)$$

になり

$$\mathbf{B} = T\mathbf{A} \quad (15.1)$$

は

$$\mathbf{B} = H\mathbf{A} \quad (15.8)$$

になる。 H は $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ の関係を表す関数とする。テンソルとは全く異なるので H で表した。 H は第 4 の虚数 h を含むという意味である。

(15.8) の両辺に右から $\overline{\mathbf{A}}$ を掛けると

$$\begin{aligned} B\overline{\mathbf{A}} &= H\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}} \\ &= H|\mathbf{A}|^2 \end{aligned}$$

なので, $A \neq 0$ のとき

$$H = \frac{B\bar{A}}{|A|^2}$$

になる. C に H を掛けて D が得られるので

$$\begin{aligned} D &= HC \\ &= \frac{B\bar{A}}{|A|^2} C \end{aligned} \quad (15.9)$$

である. このように, ベクトルを新八元数に書き換えれば割算ができるので, テンソルを作らなくても代数的計算で D を求めることができる. この計算は中学生でもできるが, テンソルによる計算は大学生でも困難である.

以上のように, 新八元数を使えばテンソルを必要としない. そして, 簡単な計算でベクトルからベクトルを作ることができる. しかも, テンソルには時空の研究に使う道具としては限界がある. そのことを次の単元で説明する.

15.2 テンソルの限界と新八元数による解決

この単元では, テンソルの限界を説明し, 新八元数はその限界を超えていることを説明する. 式を簡単にするために, ここでは座標成分はハミルトンの方法で表記する. つまり, 座標成分に i, j, k を付けない.

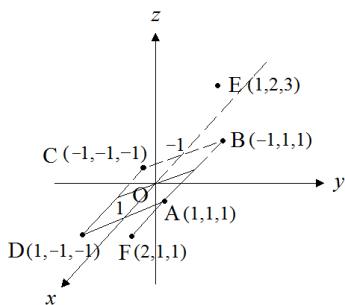


図 15.1

図 15.1 のように 3 次元空間に 4 点 $A(1, 1, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(-1, -1, -1)$, $D(1, -1, -1)$ を考える. A, B, C, D は同一平面内に存在し, その平面は x - y 平面に対して 45 度傾いていることがわかる. 原点 O と点 A, B, C, D が作るベクトルをそれぞれベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ とする.

ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソルを T とすると

$$\mathbf{B} = T\mathbf{A}$$

である. 行列で書くと

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15.10)$$

になる.

(15.10) を成り立たせるテンソル T はどのようなものだろうか. 前の単元で使ったテンソル

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (15.6)$$

を (15.10) に代入すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 \\ c_1 + c_2 + c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

になる. この式は

$$-1 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$1 = b_1 + b_2 + b_3$$

$$1 = c_1 + c_2 + c_3$$

と同じであり, 未知数が 9 個あるのに方程式が 3 個しかないので解くことができない. そこで, テンソルを構成する未知数は a, b, c の 3 個にして他の成分はすべて 0 と仮定する. また, a, b, c を効率よく配置するために, 行列の左上から右下に引いた直線に対して対称なテンソルを考え, 次のように書く.

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.11)$$

このテンソルを (15.10) に代入すると

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b+c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

なので

$$a+b+c = -1, \quad b = 1, \quad c = 1$$

である. これを解いて

$$a = -3, \quad b = c = 1$$

になる. この値を (15.11) に代入して

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.12)$$

になる. このテンソルはベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソルである.

次に (15.12) を使ってベクトル $\mathbf{C}$ から作られるベクトルを計算する. ベクトル $\mathbf{C}$ の成分は $(-1, -1, -1)$ なので

$$\begin{aligned} T\mathbf{C} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-1-1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これはベクトル $\mathbf{D}$ である. つまり, ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソル T はベクトル $\mathbf{C}$ からベクトル $\mathbf{D}$ を作る.

ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ が作る三角形 $\triangle OAB$ とベクトル $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ が作る三角形 $\triangle OCD$ を比較すると, 次のページの図 15.1 から両者が合同であることがわかる. つまり, 角 $\angle AOB$ と角 $\angle COD$ は同じであり, 辺の長さが同じであることは明らかである. 仮に点 B の座標成分を 2 倍して $(-2, 2, 2)$ にした時, (15.12) のテンソルも 2 倍になりテンソル T は

$$T = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になる.

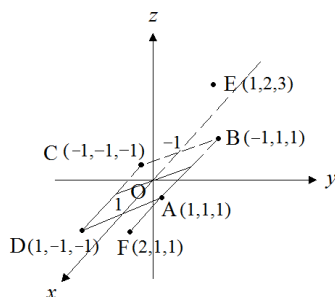


図 15.1

このテンソルをベクトル $\mathbf{C}$ に掛ければ、点 D の座標成分も 2 倍になり $(2, -2, -2)$ になることは明らかである。つまり、 $\triangle OCD$ と $\triangle OAB$ は形が変わっても合同になる。

また、ベクトル $\mathbf{C}$ の大きさがベクトル $\mathbf{A}$ の d 倍のときは、 $\triangle OCD$ は $\triangle OAB$ の d 倍の相似な三角形になることも簡単な計算で証明される。

以上のことから、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソル T をベクトル $\mathbf{C}$ に掛けてベクトル $\mathbf{D}$ を作れば、 $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ は相似になる。これはテンソルが持つ性質の一つである。

ここまでの証明では疑問は生じないが、次にテンソルが持つ限界について説明する。

(1) テンソルの第 1 の限界

まず第 1 の限界は、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソル T は複数個存在することである。(15.11) は論理的根拠があって仮定したわけではないので、他の形のテンソルの可能性が残されている。例えば次のようなテンソルを仮定する。

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad (15.13)$$

このテンソルを (15.10) に当てはめると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b \\ c \\ b+c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

になる。よって

$$a+b=-1, \quad c=1, \quad b+c=1$$

である。これを解くと

$$a = -1, b = 0, c = 1$$

になり、これを (15.13) に代入すると

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.14)$$

である。このテンソルをベクトル $\mathbf{C}$ に掛けると

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

になる。これはベクトル $\mathbf{D}$ であるので、このテンソルも $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ を相似にする。

同じように、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作りベクトル $\mathbf{C}$ からベクトル $\mathbf{D}$ を作るテンソルは

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & a & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

のように複数個存在する。つまり、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソルは複数個あり、その中からどれを選ぶかを数学的に決めることはできない。これがテンソルが持つ第1の限界である。

これに対して、ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作る新八元数は一つしか存在しない。このことを説明する。ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ を表す新八元数 A, B, C, D は

$$A = i + j + k, B = -i + j + k, C = -i - j - k, D = i - j - k \quad (15.15)$$

である。ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作る新八元数を H とすると

$$B = HA$$

になる。これに (15.15) を代入して

$$-i + j + k = H(i + j + k)$$

である。 $A = i + j + k$ の共役新八元数 $\bar{A} = -i - j - k$ を両辺に右から掛けると

$$(-i + j + k)(-i - j - k) = H(i + j + k)(-i - j - k)$$

$$\begin{aligned}
(-i+j+k)(i+j+k) &= H(i+j+k)(i+j+k) \\
-i^2 - ij - ik + ji + j^2 + jk + ki + kj + k^2 &= H(i^2 + ij + ik + ji + j^2 + jk + ki + kj + k^2) \\
1 - k + j - k - 1 + i + j - i - 1 &= H(-1 + k - j - k - 1 + i + j - i - 1) \\
-1 + 2j - 2k &= H(-3) \\
H &= (1 - 2j + 2k)/3 \tag{15.16}
\end{aligned}$$

になる. (15.16) がベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作る新八元数である.

次に H をベクトル $\mathbf{C}$ に掛けてベクトル $\mathbf{D}$ になるかを調べる. (15.15) と (15.16) から

$$\begin{aligned}
HC &= (1 - 2j + 2k)(-i - j - k)/3 \\
&= (-i - j - k + 2ji + 2j^2 + 2jk - 2ki - 2kj - 2k^2)/3 \\
&= (-i - j - k - 2k - 2 + 2i - 2j + 2i + 2)/3 \\
&= (3i - 3j - 3k)/3 \\
&= i - j - k
\end{aligned}$$

である. (15.15) から, これがベクトル $\mathbf{D}$ であることがわかる. つまり, 新八元数

$$H = (1 - 2j + 2k)/3 \tag{15.16}$$

は, ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作りベクトル $\mathbf{C}$ からベクトル $\mathbf{D}$ を作る. しかも, 唯一つしか存在しない. これが, 新八元数がテンソルよりも優れていることの一つである.

(2) テンソルの第 2 の限界

次に, テンソルが持つ第 2 の限界について説明する. 図 15.1 でベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ は同じ平面内にあるが, その平面外の点 $E(1, 2, 3)$ と原点 O が作るベクトル $\mathbf{E}$ を考える.

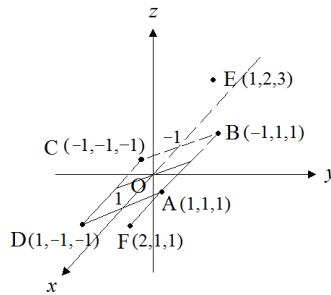


図 15.1

ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作るテンソル

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.12)$$

はベクトル $\mathbf{E}$ をどのようなベクトルに変換するだろうか. 実際に計算してみると

$$\begin{aligned} T\mathbf{E} &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+2+3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

になる. つまり, テンソル T はベクトル $\mathbf{E}$ を点 $F(2, 1, 1)$ と原点 O が作るベクトル $\mathbf{F}$ に変換する. また, 図 15.1 のように点 $F(2, 1, 1)$ は点 A, B, C, D と同じ平面内にある. E の値を変えて計算するとわかるのであるが, どんな点 E に対してもテンソル T を掛けると点 F は点 A, B, C, D と同じ平面内に戻る. これはテンソルが持つ性質の 1 つである.

さて, 同一平面内にある点 A, B, C, D が作る $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ は相似であったが, $\triangle OAB$ と $\triangle OEF$ は相似だろうか. 三平方の定理を使って辺の長さを計算すると

$$\begin{aligned} |OE|^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 \\ |OF|^2 &= 2^2 + 1^2 + 1^2 = 4 + 1 + 1 = 6 \end{aligned}$$

である. $|OE|^2 \neq |OF|^2$ なので三角形 $\triangle OAB$ と $\triangle OEF$ は相似ではない. このことから, テンソル T は, 同一平面内にあるベクトル $\mathbf{C}$ に対しては相似な $\triangle OAB$ と $\triangle OCD$ を作るが, 同一平面外にあるベクトルに対しては相似な三角形を作らない. 言い換えると, テンソルは同一平面内にあるベクトルにだけ使うことができるのであり, 同一平面内にあるベクトルと同一平面外にあるベクトルを同時に扱うことができない. これが, テンソルが持つ第 2 の限界である.

これに対して, 新八元数によるベクトルの変換は 3 次元空間全体のベクトルを同時に扱うことができる. ベクトル $\mathbf{A}$ からベクトル $\mathbf{B}$ を作る新八元数 H は

$$H = (1 - 2j + 2k)/3 \quad (15.16)$$

だけであった．ベクトル $\mathbf{E}$ を表す新八元数は $E = i + 2j + 3k$ なので， E に H を掛けて得られる点 G の新八元数は

$$\begin{aligned}
 G &= HE \\
 &= (1 - 2j + 2k)(i + 2j + 3k)/3 \\
 &= (i + 2j + 3k - 2ji - 4j^2 - 6jk + 2ki + 4kj + 6k^2)/3 \\
 &= (i + 2j + 3k + 2k + 4 - 6i + 2j - 4i - 6)/3 \\
 &= (-2 - 9i + 4j + 5k)/3
 \end{aligned} \tag{15.17}$$

になる． G は四つの座標成分を持つので，3次元空間のベクトル $\mathbf{E}$ は4次元時空のベクトル $\mathbf{G}$ になる．

3次元ベクトルが変換されて4次元ベクトルに変わることを認めない人のために，その典型例を示す．相対性理論のローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.3}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.4}$$

$$y' = y \tag{3.5}$$

$$z' = z \tag{3.6}$$

で静止した観測者 A から見た質点 D の時間 t が常に0のとき， D の座標は3次元ベクトル (x, y, z) で表される．しかし， $t = 0$ を (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) に代入すると

$$t' = \frac{-(v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

になり，等速直線運動をする観測者 B から見た D の座標 (t', x', y', z') は4次元ベクトルになる．このように，3次元ベクトルが座標変換で4次元ベクトルに変わることは自然なことである．

代数学の定理から，1次元，2次元，4次元，8次元（この本では重なった4次元）の世界しか存在できないので，3次元空間が単独で存在することは数学的にあり得ないのである．そこで，3次元空間のベクトル $\mathbf{E}$ が変換されて4次元時空のベクトル $\mathbf{G}$ になることは自然なことであり，テンソルを使った変換で3次元空間のベクトルが3次元空間のベクトルにしかならないことのほうが不自然である．

次に

$$H = (1 - 2j + 2k)/3 \quad (15.16)$$

でベクトル E から作られた 4 次元時空のベクトル G が意味を持つかどうかを調べる.

$$\begin{aligned} |OE|^2 &= E\bar{E} \\ &= (i + 2j + 3k)(-i - 2j - 3k) \\ &= -i^2 - 2ij - 3ik - 2ji - 4j^2 - 6jk - 3ki - 6kj - 9k^2 \\ &= 1 - 2k + 3j + 2k + 4 - 6i - 3j + 6i + 9 \\ &= 14 \end{aligned}$$

である. また

$$G = (-2 - 9i + 4j + 5k)/3 \quad (15.17)$$

から

$$\begin{aligned} |OG|^2 &= G\bar{G} \\ &= (-2 - 9i + 4j + 5k)(-2 + 9i - 4j - 5k)/9 \\ &= (4 - 18i + 8j + 10k + 18i - 81i^2 + 36ij + 45ik \\ &\quad - 8j + 36ji - 16j^2 - 20jk - 10k + 45ki - 20kj - 25k^2)/9 \\ &= (4 - 18i + 8j + 10k + 18i + 81 + 36k - 45j \\ &\quad - 8j - 36k + 16 - 20i - 10k + 45j + 20i + 25)/9 \\ &= (4 + 81 + 16 + 25)/9 \\ &= 126/9 \\ &= 14 \end{aligned}$$

である. よって

$$|OE|^2 = |OG|^2 = 14 \quad (15.18)$$

なので, 4 次元時空のベクトル G は 3 次元空間のベクトル E を 4 次元時空で回転させたものであることがわかる.

次に, $|EG|^2$ を求める. 点 E と点 G を結ぶ新八元数を (EG) とすると

$$\begin{aligned} (EG) &= G - E \\ &= (-2 - 9i + 4j + 5k)/3 - (i + 2j + 3k) \\ &= -\frac{2}{3} - 3i + \frac{4}{3}j + \frac{5}{3}k - i - 2j - 3k \\ &= -\frac{2}{3} - 4i - \frac{2}{3}j - \frac{4}{3}k \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}
 |EG|^2 &= (EG)\overline{(EG)} \\
 &= \left(-\frac{2}{3} - 4i - \frac{2}{3}j - \frac{4}{3}k\right)\left(-\frac{2}{3} + 4i + \frac{2}{3}j + \frac{4}{3}k\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\
 &= \frac{4}{9} + 16 + \frac{4}{9} + \frac{16}{9} \\
 &= \frac{24}{9} + 16 \\
 &= \frac{8}{3} + 16 \\
 &= \frac{56}{3}
 \end{aligned}$$

である. よって

$$|EG| = \sqrt{\frac{56}{3}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \quad (15.19)$$

になる. (15.18) と (15.19) から $\triangle OEG$ の辺の比は

$$|OE| : |OG| : |EG| = \sqrt{14} : \sqrt{14} : \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} : \sqrt{3} : 2 \quad (15.20)$$

である.

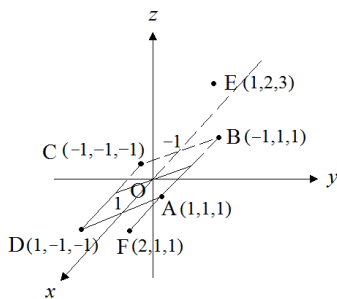


図 15.1

また, $\triangle OAB$ の辺の長さは図 15.1 から

$$\begin{aligned}
 |OA| &= |OB| \\
 &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \\
 &= \sqrt{3} \\
 |AB| &= 2
 \end{aligned}$$

なので

$$|OA| : |OB| : |AB| = \sqrt{3} : \sqrt{3} : 2 \quad (15.21)$$

である。(15.20) と (15.21) から $\triangle OEG$ と $\triangle OAB$ は相似であることがわかる。

ここで重要なことは、 $\triangle OEG$ は 4 次元時空に存在し $\triangle OAB$ は 3 次元空間に存在することである。つまり、新八元数によるベクトルの変換は 3 次元空間のベクトルを 4 次元時空のベクトルに変換し、4 次元時空で相似な三角形を作る。次に説明するように、テンソルは 3 次元空間の中の 2 次元平面内のベクトルだけに適用可能であるが、新八元数による変換はいかなる位置関係にあるベクトルにも適用できる。すなわち、新八元数による変換が 3 次元空間を含めた 4 次元時空における正しい変換である。

3 次元空間では、テンソルは 3 次元ベクトルを 3 次元ベクトルに変換するために作られたので、その結果、同一平面内と平面外のベクトルを同時に計算することができない数学になっている。言い換えると、3 次元空間のテンソルは 3 次元空間のベクトルを 2 次元ベクトルに変換して計算する数学である。このことは図 15.1 を見れば明らかである。すなわち、先に説明したように、点 A, B, C, D が作る平面外のいかなる点 E に対してテンソル T を掛けても、変換後の点 F は点 A, B, C, D と同じ平面内に戻る。座標成分が 3 個あるので 3 次元ベクトルを扱っていると考えてしまうが、同一平面内でしか使えないということは、2 次元平面のベクトルにしていることを意味する。テンソルは、3 次元空間のベクトルを 2 次元平面に押し込めることによって、3 次元ベクトルが変換後に 4 次元ベクトルになることを防いでいるのである。

テンソルを使った 3 次元ベクトルの計算で 4 次元ベクトルが出てこないことは、物を作ることが要求される工学部の研究者には便利かもしれない。しかし、宇宙や素粒子を研究する物理学者がテンソルを使うと、テンソルでは解明できない現象が残ってしまうだろう。3 行 3 列のテンソルから推測すると、4 次元ベクトルから 4 次元ベクトルを作る 4 行 4 列のテンソルも、4 次元ベクトルを 4 次元時空の一つの断面に限定して計算していることになる。4 次元ベクトルを扱っているつもりでも、実は 3 次元ベクトルに変換して計算しているのである。このことは、3 行 3 列のテンソルで行った計算を 4 行 4 列のテンソルで行えば簡単に証明される。また、3 行 3 列のテンソルでは 2 次元平面同士の関係が理解できないように、4 行 4 列のテンソルでは 4 次元時空の断面と断面の関係は理解できない。そこで、テンソルを使って解明できるのは、4 次元時空の一部の姿になるだろう。あるいは、4 次元時空が多数の断面から構成されている宇宙像を作るだろう。

上に説明したように、新八元数を使ったベクトルの変換は 4 次元時空のどこにベクトルがあろうと同じ変換を行うことができる。そして、変換の前後でベクトルの大きさを変えない。そこで、新八元数を使えば、4 次元時空全体を同時に調べ、4 次元時空の真の姿を理解できる可能性がある。

15.3 クロネッカーの δ

テンソルの本や相対性理論の本に必ず出てくるのがクロネッカーの δ (デルタ) である。その定義は以下のとおりである。

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

この δ に違和感を感じる人は多いのではないだろうか。その理由は、数学的美しさを持つ幾何学や代数学では条件によってその値が変わる数は存在しないからである。関数 $y = x$ では $x > 0$ のとき $y > 0$ になり、 $x < 0$ のとき $y < 0$ になるが、 y は関数である。幾何学や代数学では、 δ のように数そのものが条件によって違う値をとることはない。

3次元空間では i と j は 1 から 3 の自然数なので、 δ_j^i を行列の形に書くと

$$\delta_j^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

になる。この行列に図 15.1 のベクトル $\mathbf{A}(1, 1, 1)$ を掛けると

$$\begin{aligned} \delta_j^i \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A} \end{aligned}$$

つまり、 δ_j^i はベクトル $\mathbf{A}$ をベクトル $\mathbf{A}$ に変換するので、同じベクトルを作るテンソルである。

次に δ_j^i を表す新八元数を計算する。ベクトル $\mathbf{A}(1, 1, 1)$ をベクトル $\mathbf{A}$ に変換する新八元数を H とすると

$$A = HA$$

なので

$$i + j + k = H(i + j + k)$$

である。 $A = i + j + k$ の共役新八元数 $\bar{A} = -i - j - k$ を右から両辺に掛けると

$$(i + j + k)(-i - j - k) = H(i + j + k)(-i - j - k)$$

$$1 + 1 + 1 = H(1 + 1 + 1)$$

$$3 = H3$$

$$H = 1$$

になる。つまり、クロネッカーの δ_j^i は新八元数では 1 であり、条件で値が変わることはない。

「15.2 テンソルの限界と新八元数による解決」で説明したように、テンソルは 3 次元空間のベクトルを 2 次元平面に押し込めることによって、3 次元ベクトルが変換後に 4 次元ベクトルになることを防いでいる。そこで、条件で値が変わるクロネッカーの δ を必要としたのである。テンソルは時空の本当の姿を表す数学ではないので、クロネッカーの δ は自然に存在しない人工的な数になっている。このことが、先に述べたクロネッカーの δ に感じる違和感の原因である。クロネッカーの δ は新八元数では 1 なので、新八元数を使った時空の研究では必要とされない。

15.4 メトリックテンソル

アインシュタインの相対性理論で大切なテンソルの一つはメトリックテンソルである。メトリックは距離を意味し、計量テンソルともよばれる。この単元では、メトリックテンソルと新八元数の関係を説明する。

一般相対性理論も含めて相対性理論全体を扱う場合、特殊相対性理論では時間 ct と距離 x, y, z を一般化して X^0, X^1, X^2, X^3 と書く。そこで、相対性理論の教科書に書かれている世界距離 s の定義

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (7.1)$$

は

$$s^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2 \quad (15.22)$$

と書かれる。ただし、「7.2 新四元数による世界距離の導出」で説明したように、数学的に計算した世界距離の定義は

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 \quad (7.6)$$

であり、(7.1) は負の世界の世界距離の定義である。

さて、(15.22) は η (エータ)、 μ (ミュー)、 ν (ニュー) を使って次のように簡単に書き直すことができる。

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu \quad (15.23)$$

ただし

$$\eta_{00} = 1, \eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = -1, \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (: \mu \neq \nu) \quad (15.24)$$

である。(15.24) をテンソルの形にすると

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.25)$$

になる。(15.25) が特殊相対性理論におけるメトリックテンソルである。4次元微小世界距離 ds についても (15.23) と同様に

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (15.26)$$

と書くことができる。ただし、 ds^2 は $(ds)^2$ の別の書き方である。

以上の計算を新八元数で行うとどうなるだろうか。 X^0, X^1, X^2, X^3 を使うと、世界点を表す新八元数は

$$A = X^0 h + X^1 i + X^2 j + X^3 k$$

である。世界距離 s は

$$\begin{aligned} s^2 &= A\bar{A} \\ &= (X^0 h + X^1 i + X^2 j + X^3 k)(X^0 h - X^1 i - X^2 j - X^3 k) \\ &= -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2 \end{aligned} \quad (15.27)$$

になる。「7.2 新四元数による世界距離の導出」で説明したように、(15.27) が数学的に計算した世界距離である。また、4次元微小世界距離 ds についても同様に計算して

$$\begin{aligned} ds^2 &= dA\bar{dA} \\ &= (dX^0 h + dX^1 i + dX^2 j + dX^3 k)(dX^0 h - dX^1 i - dX^2 j - dX^3 k) \\ &= -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \end{aligned}$$

になる。

この計算からわかるように世界距離 s^2 は新八元数 A と $\bar{A}$ を使って計算できるので、(15.23) や (15.26) のようなメトリックテンソルを必要としない。「15.2 テンソルの限界と新八元数による解決」で説明したように、テンソルは4次元時空の物理量を4次元時空の断面に押し込めて計算する数学である。それに対して、新八元数は4次元時空の物理量を4次元時空で計算できる数学なので、テンソルを必要としない。

ここで、ベクトルと同じようにテンソルを新八元数で書き換えることができるだろうかという疑問がわいてくる。これに対する答えは「できない」である。なぜなら、先

に説明したようにテンソルはいくつかの限界を持っているのに対して, 新八元数は 4 次元時空のできごとを自由自在に研究できる数学である. 新八元数はテンソルよりも広い範囲を扱う数学なので, テンソルを新八元数で書き換えることはできないと考えられる.

16. シンクロトロン放射

16.1 シンクロトロン放射とは

図 16.1 のように、静止している観測者の x 軸方向に等速度 v で運動している電子があるとする。静止系の座標軸を x, y, z 軸とし、運動している電子の座標軸を x', y', z' 軸とする。また、 x 軸と x' 軸は重なり、 y 軸と y' 軸は同じ方向を正とし、 z 軸と z' 軸も同じ方向を正とする。光速に近い速さで運動している電子が y' 軸方向に光を放出した場合、その光は静止している観測者からはどのように観測されるだろうか。

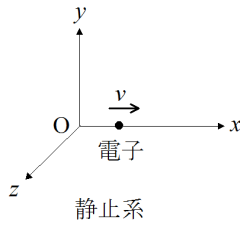


図 16.1 (a)

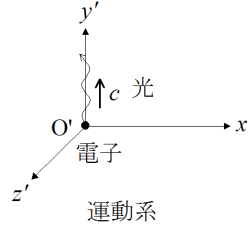


図 16.1 (b)

結論を先に言うと、相対性理論のローレンツ変換では、図 16.2 のように光は x 軸方向に放出されたように観測される。これをシンクロトロン放射とよぶ。つまり、光速に近い速度で運動している電子が進行方向に垂直な方向に放出した光は、静止した観測者からは前方に集中して観測される。

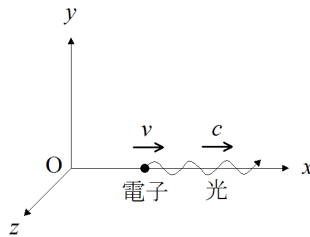


図 16.2

これに対して、新八元数を使った新ローレンツ変換では、電子が y' 軸方向に放出した光は、進行方向の x 軸方向とこれに垂直な y 軸方向の 2 方向に観測される。この章までは、時間の短縮や双子のパラドックスなどの相対性理論の結論は新八元数を使っ

た計算結果と同じになったが、シンクロトロン放射では結論が異なっている。この章では、二つの結論の違いを検討する。

16.2 ローレンツ変換による証明

まず、ローレンツ変換でシンクロトロン放射の向きを説明する。この内容は相対性理論の本に書いてある。ローレンツ変換の速度の式は、「10.4 ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理」で説明した。質点 D の速度が、静止している観測者 A からみて $V(V_x, V_y, V_z)$ であり、 A の x 軸方向に等速度 v で直線運動している観測者 B からみて $V'(V'_x, V'_y, V'_z)$ であるとする

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.16)$$

$$V'_y = \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.17)$$

$$V'_z = \frac{V_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.18)$$

である。

観測される対象 D が、電子から y' 軸方向に放出された光である場合、光の速度は $V'_x = 0$, $V'_y = c$, $V'_z = 0$ である。(10.16) で $V'_x = 0$ にすると

$$0 = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x}$$

になるので

$$V_x = v \quad (16.1)$$

である。また、(10.17) で $V'_y = c$ にすると

$$c = \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x}$$

である。この式に (16.1) を代入して

$$\begin{aligned} c &= \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)v} \\ &= \frac{V_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{V_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

になる。よって

$$V_y = c \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

である. また, (10.18) で $V'_z = 0$ にして

$$0 = \frac{V_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c^2)V_x}$$

になる. よって

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

である. まとめて書くと

$$V_x = v \quad (16.1)$$

$$V_y = c \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

である.

電子の速度 v が光速 c に限りなく近づいたとき (16.1), (16.2), (16.3) から

$$V_x = c$$

$$V_y = 0$$

$$V_z = 0$$

になる. これは静止した観測者から見て光は前方の x 軸方向に速度 c で進んでいることを示している. これが, シンクロトン放射光である.

16.3 新ローレンツ変換による証明

「10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理」で証明した新ローレンツ変換の速度の式は

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.25)$$

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.26)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.27)$$

である.

観測される対象 D が電子から y' 軸方向に放出された光である場合, 光の速度は $V'_x = 0$, $V'_y = c$, $V'_z = 0$ である. (10.25) で $V'_x = 0$ にすると

$$0 = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x}$$

である. よって

$$V_x = v \quad (16.4)$$

になる. また, (10.26) で $V'_y = c$ にして

$$c = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - (v/c^2)V_x}$$

である. この式に (16.4) を代入して

$$c = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \quad (16.5)$$

になる. また, (10.27) で $V'_z = 0$ にして

$$0 = \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - (v/c^2)V_x}$$

になる. この式から

$$V_z = (v/c)V_y h \quad (16.6)$$

になる. (16.6) を (16.5) に代入すると

$$c = \frac{V_y(1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2}$$

なので

$$V_y = c \quad (16.7)$$

になる. (16.7) を (16.6) に代入すると

$$V_z = v h \quad (16.8)$$

になる. (16.4), (16.7), (16.8) をまとめて書くと

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = v h \quad (16.8)$$

である.

相対性理論のローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.1)$$

$$V_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

と比べると, 新ローレンツ変換では V_y が常に光速 c であり, V_z は負の世界の $[zhk]$ 軸成分の vh になる.

16.4 シンクロトン放射光と光速不変の原理

ローレンツ変換から求められた (16.1), (16.2), (16.3) と新ローレンツ変換から求められた (16.4), (16.7), (16.8) のどちらが正しいのだろうか. まず, (16.1), (16.2), (16.3) が「光速不変の原理」を満たすかどうかを調べる. V_x , V_y , V_z の合成速度 V は

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

である. この式に

$$V_x = v \quad (16.1)$$

$$V_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

を代入すると

$$\begin{aligned} V^2 &= v^2 + c^2(1 - v^2/c^2) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

になるので

$$V = c$$

である. これは, 光速不変の原理を満たしている.

新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

を使って同じ計算をしてみると

$$\begin{aligned} V^2 &= v^2 + c^2 - v^2 \\ &= c^2 \end{aligned}$$

になるので, (16.4), (16.7), (16.8) も光速不変の原理を満たしている.

16.5 シンクロトン放射光の傾き

次に、電子から y' 軸方向に放出された光が静止系から観測されるとき光の傾きを調べる。ローレンツ変換では

$$V_x = v \quad (16.1)$$

$$V_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

から、光の x 軸からの傾きは V_y/V_x であり

$$\frac{V_y}{V_x} = \frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}$$

になる。電子の速度 v が光速 c に限りなく近づいた極限では

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow c} \frac{V_y}{V_x} &= \lim_{v \rightarrow c} \frac{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} \\ &= \frac{c\sqrt{1 - c^2/c^2}}{c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

になる。つまり、 x 軸から見て傾き 0 の直線、すなわち、 x 軸と一致する。これが、静止している観測者 A から見てシンクロトン放射光が前方に集中する理由である。

新ローレンツ変換から求められた式 (16.4), (16.7), (16.8) を使って同じ計算をするときは、計算法を変えなければならない。なぜなら、ローレンツ変換では $V_z = 0$ なので x - y 平面だけ考えて計算すればよかったのであるが、新ローレンツ変換では $V_z = vh$ なので計算が複雑になるからである。

「2 重構造を持つ 4 次元時空で、速度が x , y , z の 3 方向の成分を持つとき、まず y - z 平面の合成速度 V_{yz} を求め、次に V_{yz}/V_x を計算すれば x 軸からの傾きが計算できる」と仮定する。この計算は正の世界では正しいのであるが、 $V_z = vh$ のように負の世界の速度成分があるときも正しいのかどうかは証明されていない。そこで、「**13.2 新八元数の公理**」で「**公理 12**」にした。

まず、 x 軸からの傾きを計算する。

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

から

$$\begin{aligned} V_{yz}^2 &= V_y^2 + V_z^2 \\ &= c^2 + (vh)^2 \\ &= c^2 - v^2 \end{aligned}$$

なので, $c > v$ の条件で

$$V_{yz} = \sqrt{c^2 - v^2} \quad (16.9)$$

である. 新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

と (16.9) から, シンクロトン放射光の x 軸からの傾きは

$$\frac{V_{yz}}{V_x} = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}$$

になる. 電子の速度 v が光速 c に限りなく近づいた極限では

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow c} \frac{V_{yz}}{V_x} &= \lim_{v \rightarrow c} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v} \\ &= \frac{\sqrt{c^2 - c^2}}{c} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16.10)$$

になる. つまり, 光の軌跡は x 軸から見て傾き 0 の直線, すなわち x 軸と一致する. この結果は, ローレンツ変換による計算結果と一致している.

次に, y 軸からの傾きを計算する. 新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

から

$$\begin{aligned} V_{xz}^2 &= V_x^2 + V_z^2 \\ &= v^2 + v^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって

$$V_{xz} = 0 \quad (16.11)$$

である. 新ローレンツ変換から求められた式

$$V_y = c \quad (16.7)$$

と (16.11) から

$$\begin{aligned} \frac{V_{xz}}{V_y} &= \frac{0}{c} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (16.12)$$

この結果は、電子の速度 v に関係なくシンクロトン放射光は y 軸方向の光になることを示している。

x 軸からの傾きを求める計算 (16.10) でシンクロトン放射光は x 軸方向になるはずであったが、(16.12) では y 軸方向にもなる。この矛盾の原因は何だろうか。

このことを考える前に、 z 軸からの傾きを計算する。新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

から

$$\begin{aligned} V_{xy}^2 &= V_x^2 + V_y^2 \\ &= v^2 + c^2 \end{aligned}$$

になる。つまり

$$V_{xy} = \sqrt{v^2 + c^2} \quad (16.13)$$

である。新ローレンツ変換から求められた式

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

と (16.13) から

$$\begin{aligned} \frac{V_{xy}}{V_z} &= \frac{\sqrt{v^2 + c^2}}{vh} \\ &= -h\sqrt{1 + c^2/v^2} \end{aligned}$$

である。電子の速度 v が光速 c に限りなく近づいた極限では

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow c} \frac{V_{xy}}{V_z} &= -\lim_{v \rightarrow c} h\sqrt{1 + c^2/v^2} \\ &= -h\sqrt{1 + c^2/c^2} \\ &= -\sqrt{2}h \end{aligned}$$

になる。この結果は、 z 軸からの傾きは負の世界の数になるので我々は観測できないことを示している。

以上の結果から、光速に近い速度で x 軸方向に運動する電子から電子の y' 軸方向に放出された光は、静止してる観測者からは x 軸方向の速度 c の光と y 軸方向の速度 c の光として観測されることになる。その他に、負の世界の速度 c の光があるが観測できない。

この結果から、運動している電子から 1 本の世界線で放出された光が静止した観測者からは 3 本の世界線として観測されるという矛盾が生じる。しかし、新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

に時間成分 cth を加えて、光の世界線の新八元数は

$$cth + V_x ti + V_y tj + V_z tk = cth + vti + ctj + vthk$$

になる。この式から、静止系の世界線は 1 本であり、3 本に見えるだけであると考えられる。なぜ、3 本に見えるかは現時点では不明である。ただし、 hk 成分は負の世界の成分なので、 y' 軸方向に放出された光の世界線は正負の両方の世界にまたがって存在する。

V_{yz}/V_x を計算すれば x 軸からの傾きが計算できるという「公理 12」が、2 重構造を持つ 4 次元時空では間違っているものかもしれない。あるいは、新八元数そのものが間違っているのかもしれない。しかし、相対性理論の結論のなかで新八元数を使った計算結果と一致しないのはシンクロトン放射光の向きだけなので、この結果の正しい説明が将来なされるかもしれない。

16.6 シンクロトン放射の垂直光の観測

前の単元で、「光速に近い速度で x 軸方向に運動する電子から電子の y' 軸方向に放出された光は、静止して観測者からは x 軸方向の速度 c の光と y 軸方向の速度 c の光として観測される」と書いたが、 y 軸方向の速度 c の光はどのように観測されるだろうか。

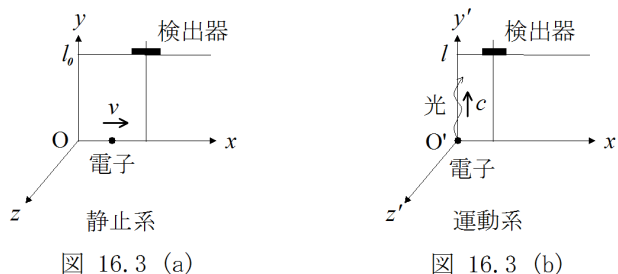


図 16.3 のように、電子の運動方向に平行な直線上に光の検出器が置いてあると仮定する。2 本の平行線間の距離は、静止系から見た場合は l_0 であり電子から見た場合は

l であるとする．このとき、 l_0 と l の関係はどうなるだろうか．新ローレンツ変換の

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

に $z' = 0$, $y' = l$, $y = l_0$ を代入して

$$l = \frac{l_0 + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (16.14)$$

$$0 = \frac{z - (v/c)l_0h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (16.15)$$

になる．(16.15) から

$$z = (v/c)l_0h \quad (16.16)$$

なので、これを (16.14) に代入して

$$\begin{aligned} l &= \frac{l_0 - (v/c)^2 l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned}$$

になる．この式から、電子の座標で見ると電子の速さ v が光速 c に近づくと l は 0 になり、光は極めて短い時間で検出器に到達する．

これに対して、静止した観測者 A の座標では y 軸方向の光の速度は c であり検出器までの距離は l_0 なので

$$\frac{l_0}{c}$$

の時間で検出器に光が達する．ただし、(16.16) からわかるように負の世界の z 軸成分があるので、観測できるかどうかは現時点では不明である．

16.7 光と慣性の法則

図 16.1 で電子から y' 方向に放出された光の軌跡は、電子から見て直線になるだろうか．

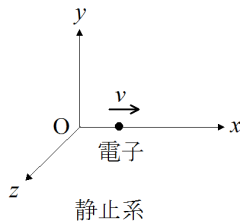


図 16.1 (a)

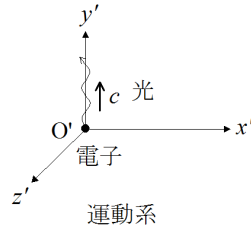


図 16.1 (b)

光は波と粒子の両方の性質を持つので、粒子のときの光を「光子」とよべば、図 16.1 で最初に放出した光子と最後に放出した光子は同じ y' 軸上に並ぶだろうか。もし、光子が質量をもっていれば、電車の中で上に投げたボールが元の手に戻るように、電子から見て垂直線上を動くだろう。質量をもつ質点には慣性の法則が働き、ボールはすでに電車の進行方向に電車と同じ速度を持っているので、元の位置に戻るのである。同様に、もし光子に質量があれば x 軸方向の速度 v を持っているので、電子から見て垂直線上に並ぶはずである。しかし、相対性理論の結論では、光は静止質量をもたず運動質量だけを持つ特殊な存在である。そこで、電子から放出された光の軌跡を慣性の法則を使わずに調べる。なお、光が静止質量を持たず運動質量だけを持つことは、新八元数を使って証明できる。その内容は「18.6 光の質量とヒッグス粒子」で説明する。

「8.2 新四元数による光の世界距離の証明」で説明したように光の世界距離は常に 0 なので、静止系から見た光の世界点を (cth, xi, yj, zk) として、運動系から見た世界点を $(ct'h, x'i, y'j, z'k)$ とすると

$$-(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad (16.17)$$

である。電子から y' 軸方向に放出された光子が直線上に並ぶならば、その軌跡上の世界点は $A(ct'h, 0, ct'j, 0)$ である。この点が (16.17) を満たせば、光の条件を満たしている。

(16.17) の左辺に A を代入して

$$\begin{aligned} -(ct')^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 &= -(ct')^2 + 0 + (ct')^2 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

になる。つまり、電子から y' 方向に放出された光は電子から見て直線になることが証明された。

静止系から見た光の軌跡上の点を B とすると、新ローレンツ変換から求められた式

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = vh \quad (16.8)$$

を使って $B(cth, vti, ctj, vthk)$ になる。この座標成分を (16.17) の右辺に代入すると

$$\begin{aligned} -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 &= -(ct)^2 + (vt)^2 + (ct)^2 + (vth)^2 \\ &= -(ct)^2 + (vt)^2 + (ct)^2 - (vt)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

になる。よって、 B が描く世界線は光の世界線の条件を満たしている。この結果は、電子から垂直方向に放出された光の新ローレンツ変換を使った計算の正しさを示している。

この証明では光の質量の有無を必要としないので、光が静止質量を持たなくても慣性の法則と同じ現象が成り立つことがわかる。これに対して、「慣性の法則は質量がある場合だけに成り立つはずである」と反論する人がいるかも知れない。しかし、「**9.3 運動系の視点での計算**」で説明したように、慣性の法則は「力が加えられなければ質点の世界線は直線になる」ということの言い換えなので、質量を必要としないのである。実際に、ニュートンの慣性の法則には「質量 0 のときには成り立たない」とは書かれていない。光は運動質量を持つので、運動質量に対して慣性の法則が成り立つということもできるが、上の証明は光の質量を必要としない。

16.8 ボールの投げ上げ

「**16.5 シンクロトン放射光の傾き**」で、「光速に近い速度で x 軸方向に運動する電子から電子の y' 軸方向に放出された光は、静止してる観測者からは x 軸方向の速度 c の光と y 軸方向の速度 c の光として観測される」と書いたが、速度 v で走る電車の中で垂直方向に速度 w でボールを投げ上げた場合、静止している観測者からボールは光と同じように 2 個に見えるだろうか。

「**16.3 新ローレンツ変換による証明**」で使った式

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.25)$$

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.26)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.27)$$

で、 $V'_x = 0$, $V'_y = w$, $V'_z = 0$ の場合が電車の中でのボールの投げ上げになる。

(10.25) で $V'_x = 0$ にすると

$$V_x = v \quad (16.18)$$

になる。(10.27) で $V'_z = 0$ にすると

$$V_z = (v/c)V_y h \quad (16.19)$$

になる。(10.26), (16.18), (16.19) と $V'_y = w$ から

$$w = \frac{V_y - (v/c)^2 V_y}{1 - (v/c^2)v}$$

なので

$$V_y = w \quad (16.20)$$

である。また、(16.19) と (16.20) から

$$V_z = (v/c)wh \quad (16.21)$$

になる.

まとめて書くと

$$V_x = v \quad (16.18)$$

$$V_y = w \quad (16.20)$$

$$V_z = (v/c)wh \quad (16.21)$$

である. これらの式を使って, 静止系から見たボールの軌跡の座標軸からの傾きを調べる. (16.18) と (16.20) から

$$\begin{aligned} V_{xy}^2 &= V_x^2 + V_y^2 \\ &= v^2 + w^2 \end{aligned}$$

なので

$$V_{xy} = \sqrt{v^2 + w^2} \quad (16.22)$$

である. また, (16.20) と (16.21) から

$$\begin{aligned} V_{yz}^2 &= V_y^2 + V_z^2 \\ &= w^2 - (v/c)^2 w^2 \end{aligned}$$

なので

$$V_{yz} = w\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.23)$$

である. また, (16.18) と (16.20) から

$$\begin{aligned} V_{zx}^2 &= V_x^2 + V_z^2 \\ &= v^2 - (v/c)^2 w^2 \end{aligned}$$

なので

$$V_{zx} = v\sqrt{1 - (w/c)^2} \quad (16.24)$$

である. (16.18), (16.20), (16.21), (16.22), (16.23), (16.24) から x 軸, y 軸, z 軸からの傾きを求めると

$$\frac{V_{yz}}{V_x} = \frac{w\sqrt{1 - v^2/c^2}}{v} = w\sqrt{1/v^2 - 1/c^2} \quad (16.25)$$

$$\frac{V_{zx}}{V_y} = \frac{v\sqrt{1 - (w/c)^2}}{w} = v\sqrt{1/w^2 - 1/c^2} \quad (16.26)$$

$$\frac{V_{xy}}{V_z} = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{(v/c)wh} = -ch\sqrt{1/v^2 + 1/w^2} \quad (16.27)$$

である.

静止系からボールが 1 個に見えるためには、少なくとも、(16.25) が (16.26) の逆数になり両方を掛けて 1 にならなければならないが、そうになっていない。よって、電車の中で投げ上げられたボールも静止系から見ると観測できない負の世界を除き 2 個に見えるはずである。

現実には 1 個に見えるが、その理由は v, w が光速 c に比べて極めて遅いことである。(16.25), (16.26), (16.27) は $1/c^2 \div 0$ の場合

$$\begin{aligned}\frac{V_{yz}}{V_x} &= w\sqrt{1/v^2} = w/v \\ \frac{V_{zx}}{V_y} &= v\sqrt{1/w^2} = v/w \\ \frac{V_{xy}}{V_z} &= -ch\sqrt{1/v^2 + 1/w^2} = -\infty\end{aligned}$$

になる。

$$(V_{yz}/V_x)(V_{zx}/V_y) = (w/v)(v/w) = 1$$

なので、ボールは x 軸と y 軸から同じ位置にあり、静止系から 1 個に見える。 $V_{xy}/V_z = -\infty$ は逆数を計算すると $V_z/V_{xy} = 0$ になり、ボールが x - y 平面にあることを意味するので矛盾しない。

速度 v で走る電車の中で垂直方向に速度 w で投げ上げられたボールが、静止している観測者から進行方向と垂直方向の 2 方向で観測されることは信じがたいことであるが、実験物理学者が精密な実験装置を作れば観測できるかもしれない。

17. 新八元数による力学

17.1 座標変換で不変な物理量の形

「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」では、世界距離の絶対値が不変になる座標変換 $\bar{B}/|B|$ を使って、時間と距離に関する新ローレンツ変換の式を求めた。この章では速度や運動量、加速度を扱うので、等速直線運動をする観測者の座標に変換しても絶対値が不変になる物理量が満たすべき条件を先に求める。

静止している観測者 A から見た物理量 P が4次元時空の四つの成分 (Eh, Fi, Gj, Hk) を持つとする。 E は時間成分であり、 F, G, H は空間成分である。 A の x 軸方向に等速度 v で運動する観測者 B からみた物理量 P の座標成分が $P'(E'h, F'i, G'j, H'k)$ であるとする。 P の絶対値が不変、つまり、 $|P| = |P'|$ にする座標変換の式は「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で説明したように、観測者 B の新八元数を B とするとき P に $\bar{B}/|B|$ を掛けて求めることができる。 $B = cth + vti$ なので

$$P' = \frac{P(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}}$$

である。 $c > v$ のとき、この式に $P = Eh + Fi + Gj + Hk$ を代入して

$$\begin{aligned} P' &= \frac{(Eh + Fi + Gj + Hk)(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}} \\ &= \frac{1}{cth\sqrt{1 - (vti)^2/(cth)^2}} \\ &\quad \times (Ecth^2 + Fcthi + Gcthj + Hcthk - Evthi - Fvti^2 - Gvtji - Hvtki) \\ &= \frac{1}{cth\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\quad \times (-Ect + Fcthi + Gcthj + Hcthk - Evthi + Fvt + Gvtk - Hvtj) \\ &= \frac{-h}{ct\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\quad \times [(-Ect + Fvt) + (Fct - Evt)hi + (Gcth - Hvt)j + (Hcth + Gvt)k] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\quad \times [(E - Fv/c)h + (F - Ev/c)i + (G + Hvh/c)j + (H - Gvh/c)k] \end{aligned}$$

である. $P' = E'h + F'i + G'j + H'k$ なので係数を比較して

$$E' = \frac{E - (v/c)F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.1)$$

$$F' = \frac{F - (v/c)E}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.2)$$

$$G' = \frac{G + (v/c)Hh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.3)$$

$$H' = \frac{H - (v/c)Gh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.4)$$

になる. (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) が, 等速直線運動をする観測者 B の座標から見てもその絶対値が変わらない物理量が満たすべき式である.

$|P| = |P'|$ になることは

$$|P'|^2 = (E'h + F'i + G'j + H'k)(E'h - F'i - G'j - H'k)$$

に (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) を代入して

$$\begin{aligned} |P'|^2 &= -E'^2 + F'^2 + G'^2 + H'^2 \\ &= -\left[\frac{E - (v/c)F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]^2 + \left[\frac{F - (v/c)E}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]^2 + \left[\frac{G + (v/c)Hh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]^2 + \left[\frac{H - (v/c)Gh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right]^2 \\ &= -E^2 + F^2 + G^2 + H^2 \\ &= (Eh + Fj + Gj + Hk)(Eh - Fj - Gj - Hk) \\ &= |P|^2 \end{aligned}$$

になることから確認できる. 途中の計算は省略する.

(17.1), (17.2), (17.3), (17.4) で大事なことは以下の三点である.

- (1) 分母が変数の t や x を含まず, 定数の $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ になっている.
- (2) P と P' に同じ定数を掛けても $|P| = |P'|$ が成り立つ.
- (3) (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形にすれば, どんな物理量も座標変換で不変になるので, ある物理量が座標変換で不変かどうかを別の方法で証明した後に (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形に書かなければならない. 先に (17.1), (17.2) (17.3), (17.4) の形に書いて, 座標変換で不変であると主張してはいけない.

アインシュタインの相対性理論では, 4次元時空における座標変換で絶対値が不変な速度, 加速度, 運動量, 力を4元速度, 4元加速度, 4元運動量, 4元力というが, 絶対値を不変にするために, (1) の理由で座標変換後の形はすべての分母が $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を持つ. また, (2) の理由で分子に定数である質量 m_0 を掛けたり分母に $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を数回掛けたりしている.

(3) については説明が必要である．例えば熱量 Q が座標成分 $(Q_{th}, Q_{xi}, Q_{yj}, Q_{zk})$ を持つと仮定して (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形に書き, この式を使って熱量の絶対値 $|Q|$ は座標変換で不変であると主張したとする．この理論の間違ひの原因は, 別の方法で熱量の絶対値 $|Q|$ が座標変換で不変であることを証明せずに (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形に書いたことである．この例では, 熱量 Q はスカラー量であり座標成分を持たないことは明らかなので, すぐに間違いに気づくが, 速度や加速度のようなベクトル量では, 上記の間違いをおかしやすいので注意が必要である．

17.2 速度と運動量の座標変換と質量

この單元では, 速度が座標変換で不変かどうかを新八元数を使って検討する．その結果, 速度は座標変換で不変ではないが, 質量が速度により変化すると仮定すれば運動量は座標変換で不変になることがわかる．また, 逆に運動量が座標変換で不変であれば, 質量が速度により変化するということもできる．以下に, それを証明する．

静止している観測者 A の x 軸方向に等速度 v で運動する観測者 B がいるとする．また, 観測される質点 D の A から見た座標を (ct_h, x_i, y_j, z_k) とし, B から見た座標を $(ct'_h, x'_i, y'_j, z'_k)$ とする．このとき, 4次元時空図は図 17.1 のようになる． z 軸は見えないので破線で描いた．また, A から見た D の速度を $V(V_{th}, V_{xi}, V_{yj}, V_{zk})$ とし, B から見た D の速度を $V'(V'_th, V'_xi, V'_yj, V'_zk)$ とする．ただし, V, V' は新八元数でありベクトルではない．

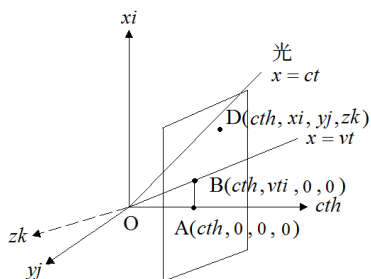


図 17.1

「10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理」で説明したように新ローレンツ変換の速度の変換式は

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.25)$$

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.26)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.27)$$

であり, 速度の時間成分 V'_t は

$$V'_t = \frac{cdt'}{dt'} = c \quad (17.5)$$

である.

V'_t も含めて計算した V' の絶対値の 2 乗

$$\begin{aligned} |V'|^2 &= (V'_t h + V'_x i + V'_y j + V'_z k)(V'_t h - V'_x i - V'_y j - V'_z k) \\ &= -V'^2_t + V'^2_x + V'^2_y + V'^2_z \end{aligned}$$

が座標変換で不変, つまり, $|V'|^2 = |V|^2$ にならないことは, 「**17.1 座標変換で不変な物理量の形**」の (1) で説明したように, (10.25), (10.26), (10.27), (17.5) の分母が $\sqrt{1-v^2/c^2}$ を含んでいないことから明らかである. 計算結果だけを書くと, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} |V'|^2 &= -V'^2_t + V'^2_x + V'^2_y + V'^2_z \\ &= \frac{1-v^2/c^2}{(1-V_x v/c^2)^2} (-V_t^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \end{aligned}$$

この問題を解決するために, 観測者 B が質点 D に限りなく近づき, B から見た D の x 軸方向の速度 V'_x が 0 の場合を考える. そのとき, 観測者 A から見た B の速度 v と D の x 軸方向の速度 V_x が同じである. つまり

$$V_x = v \quad (17.6)$$

になる. ただし, B と D の y 軸方向と z 軸方向の速度は同じでなくてもよい. また, (10.25) で $V'_x = 0$ としても (17.6) が求められる.

(17.6) を (10.26) と (10.27) に代入すると

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \quad (17.7)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \quad (17.8)$$

になる. (17.5), (17.6), (17.7), (17.8) と $V'_x = 0$, $V_t = cdt/dt = c$ から

$$\begin{aligned} |V'|^2 &= (V'_t h + V'_x i + V'_y j + V'_z k)(V'_t h - V'_x i - V'_y j - V'_z k) \\ &= -V'^2_t + V'^2_x + V'^2_y + V'^2_z \\ &= -c^2 + 0^2 + \left[\frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \right]^2 + \left[\frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -c^2 + \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \\
&\quad \times [V_y^2 + 2(v/c)V_yV_zh + (v/c)^2V_z^2h^2 + V_z^2 - 2(v/c)V_yV_zh + (v/c)^2V_y^2h^2] \\
&= -c^2 + \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} [V_y^2 - (v/c)^2V_z^2 + V_z^2 - (v/c)^2V_y^2] \\
&= -c^2 + \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} (1 - v^2/c^2)(V_y^2 + V_z^2) \\
&= -c^2 + \frac{V_y^2 + V_z^2}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (-c^2 + v^2 + V_y^2 + V_z^2) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (-V_t^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (V_th + V_xi + V_yj + V_zk)(V_th - V_xi - V_yj - V_zk) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} |V|^2
\end{aligned}$$

になる。平方根を作ると

$$|V'| = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V| \quad (17.9)$$

である。

(17.9) から、4次元時空で速度の絶対値は座標変換で不変ではないことがわかる。また、速度の時間成分 $V_t = V'_t = c$ を速度の絶対値の計算に含めない場合も座標変換で不変にならないことは、上記の計算で V_t と V'_t を 0 にすれば簡単に証明できる。

では (17.9) から何がわかるだろうか。(17.9) の両辺に質点 D の静止質量 m_0 を掛けると

$$m_0 |V'| = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V| \quad (17.10)$$

になる。静止質量 m_0 は静止している観測者 A から見た質量ではなく、 x 軸方向の速度が質点 D と同じ観測者 B 、もしくは質点 D そのものから見た質量である。つまり、質点 D を静止していると観測する座標系から見た質量である。これに対して、質点から見れば運動している観測者 A から見た質量は運動質量 m である。

(17.10) に

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.11)$$

を代入すると

$$m_0 |V'| = m |V| \quad (17.12)$$

になる。(17.12) の左辺は質点 D を x 軸方向に静止しているとみなすことができる観測者 B と質点 D から見た質量と速度の積であり、右辺は質点から見れば運動してい

る静止系の観測者 A から見た質量と速度の積である。よって, (17.12) は D の運動量が座標変換で不変であることを示している。また, (17.11) から速度 v が増せば運動質量 m は増大し, v が光速 c に近づけば質量は無限大になることがわかる。

以上の結果から以下の二つの結論が得られる。

- (1) 3次元空間でも4次元時空でも, 速度の絶対値は座標変換で不変ではない。
- (2) 静止質量 m_0 と運動質量 m の関係が

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

のとき, 時間成分まで含めた運動量 $m|V|$ は座標変換で不変である。

結論 (2) は次のように言い換えることもできる。すなわち

- (3) 時間成分まで含めた運動量 $m|V|$ が座標変換で不変ならば, 静止質量 m_0 と運動質量 m の関係は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である。

このことは, 「運動による質量の変化」か「運動量不変の法則」のどちらかを公理, すなわち正しいと考えられるが証明できない法則にしなければ他方の法則が導けないことを示している。しかし, 「**18.1 質量は単位世界線の時間成分である**」で説明するように「質量は単位世界線の時間成分である」を公理として認めると, 「運動による質量の変化」と「運動量不変の法則」の両方が導かれる。そのとき, この二つの法則は公理ではなく定理になる。

次に

$$m_0|V'| = m|V| \quad (17.12)$$

が正しいかどうかを確認する。(17.12) の右辺は新八元数で書くと (17.6) と (17.11) から

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (ch + vi + V_y j + V_z k) \quad (17.13)$$

である。また, 左辺は新八元数で書くと (17.5), (17.7), (17.8) と $V'_x = 0$ から

$$m_0 \left\{ ch + 0i + \left[\frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \right] j + \left[\frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \right] k \right\} \quad (17.14)$$

である。(17.13) を座標変換して (17.14) になれば, (17.12) の正しさが証明されたことになる。

(17.13) の座標変換は, 「**17.1 座標変換で不変な物理量の形**」で説明したように $\bar{B}/|B|$ を掛けて

$$\begin{aligned}
& \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (ch + vi + V_y j + V_z k) \frac{(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}} \\
&= \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (ch + vi + V_y j + V_z k) \frac{(cth - vti)}{cth \sqrt{1-(v/c)^2}} \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} (ch + vi + V_y j + V_z k) (1 - vi/ch) \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} (ch + vi + V_y j + V_z k) (1 + vhi/c) \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} (ch + vi + V_y j + V_z k + v h^2 i + v^2 h i^2 / c + V_y v h j i / c + V_z v h k i / c) \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} (ch + vi + V_y j + V_z k - vi - v^2 h / c - V_y v h k / c + V_z v h j / c) \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} (ch - v^2 h / c + V_y j + V_z v h j / c + V_z k - V_y v h k / c) \\
&= \frac{m_0}{1-v^2/c^2} \{ c(1 - v^2/c^2)h + [V_y + (v/c)V_z h] j + [V_z - (v/c)V_y h] k \} \\
&= m_0 \left\{ ch + 0i + \left[\frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \right] j + \left[\frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \right] k \right\}
\end{aligned}$$

である。この結果は (17.14) と同じなので、運動量

$$m_0 |V'| = m |V| \quad \left(: m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad (17.15)$$

は座標変換で不変であることが確認された。

(17.15) では、観測者 B の速度 v が質点 D の速度の x 軸成分 V_x と同じであり、 y 軸成分 V_y と z 軸成分 V_z に制限はなかったので、 B の速度 v が A の x 軸方向のときは、 D の運動質量 m の変化は V_y と V_z に無関係である。

17.3 一般の速度と運動量の座標変換と質量

この単元では、観測者 B の速度 v が 3 次元空間の任意の方向のときの運動量の保存と質量の変化を調べる。「10.8 新ローレンツ変換の一般式」で説明したように、静止系の観測者 A に対して等速直線運動をしている観測者 B の速度が $v(v_x, v_y, v_z)$ のときの新ローレンツ変換の一般式は

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (t - v_x x / c^2 - v_y y / c^2 - v_z z / c^2) \quad (10.38)$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (x - v_x t + v_z y h / c - v_y z h / c) \quad (10.39)$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(y - v_y t + v_x z h/c - v_z x h/c) \quad (10.40)$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(z - v_z t + v_y x h/c - v_x y h/c) \quad (10.41)$$

である。微小量は

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(dt - v_x dx/c^2 - v_y dy/c^2 - v_z dz/c^2) \quad (17.16)$$

$$dx' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(dx - v_x dt + v_z dy h/c - v_y dz h/c) \quad (17.17)$$

$$dy' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(dy - v_y dt + v_x dz h/c - v_z dx h/c) \quad (17.18)$$

$$dz' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(dz - v_z dt + v_y dx h/c - v_x dy h/c) \quad (17.19)$$

なので, (17.17), (17.18), (17.19) を (17.16) で割って

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx - v_x dt + v_z dy h/c - v_y dz h/c}{dt - v_x dx/c^2 - v_y dy/c^2 - v_z dz/c^2} \\ &= \frac{dx/dt - v_x + (v_z h/c) dy/dt - (v_y h/c) dz/dt}{1 - (v_x/c^2) dx/dt - (v_y/c^2) dy/dt - (v_z/c^2) dz/dt} \\ &= \frac{V_x - v_x + (v_z h/c) V_y - (v_y h/c) V_z}{1 - (v_x/c^2) V_x - (v_y/c^2) V_y - (v_z/c^2) V_z} \end{aligned} \quad (17.20)$$

$$\begin{aligned} V'_y &= \frac{dy'}{dt'} \\ &= \frac{V_y - v_y + (v_x h/c) V_z - (v_z h/c) V_x}{1 - (v_x/c^2) V_x - (v_y/c^2) V_y - (v_z/c^2) V_z} \end{aligned} \quad (17.21)$$

$$\begin{aligned} V'_z &= \frac{dz'}{dt'} \\ &= \frac{V_z - v_z + (v_y h/c) V_x - (v_x h/c) V_y}{1 - (v_x/c^2) V_x - (v_y/c^2) V_y - (v_z/c^2) V_z} \end{aligned} \quad (17.22)$$

になる。ただし, V'_y と V'_z の途中の計算は省略した。また, B からみた D の速度の時間成分 V'_t は

$$V'_t = \frac{cdt'}{dt'} = c \quad (17.23)$$

である。

V'_t も含めて計算した V' の絶対値の 2 乗

$$\begin{aligned} |V'|^2 &= (V'_t h + V'_x i + V'_y j + V'_z k)(V'_t h - V'_x i - V'_y j - V'_z k) \\ &= -V'^2_t + V'^2_x + V'^2_y + V'^2_z \end{aligned}$$

が座標変換で不変, つまり, $|V'|^2 = |V|^2$ にならないことは, 「**17.1 座標変換で不変な物理量の形**」の (1) で説明したように, (17.20), (17.21), (17.22), (17.23) の分母が $\sqrt{1-v^2/c^2}$ を含んでいないことから明らかである.

そこで, 観測者 B の速度 v が静止した観測者 A の x 軸方向のときと同じように, B が質点 D と一致した場合を考える. このとき, A から見た D の速度 $V(V_x, V_y, V_z)$ は B の速度 $v(v_x, v_y, v_z)$ と同じになるので

$$V_x = v_x, V_y = v_y, V_z = v_z \quad (17.24)$$

である. また, B から見た D の速度 $V'(V'_x, V'_y, V'_z)$ は 0 になるので

$$V'_x = V'_y = V'_z = 0 \quad (17.25)$$

である. (17.23) と (17.25) から

$$\begin{aligned} |V'|^2 &= -V_t'^2 + V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2 \\ &= -c^2 \end{aligned} \quad (17.26)$$

である. また, (17.24) と $V_t = cdt/dt = c$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ から

$$\begin{aligned} |V|^2 &= -V_t^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 \\ &= -c^2 + v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ &= -c^2 + v^2 \\ &= -c^2(1 - v^2/c^2) \end{aligned} \quad (17.27)$$

である. (17.26) と (17.27) から

$$\begin{aligned} |V|^2 &= |V'|^2 (1 - v^2/c^2) \\ |V'|^2 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} |V|^2 \end{aligned}$$

になる. 平方根を作ると

$$|V'| = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V|$$

なので, 4次元時空中で速度は座標変換で不変ではない. そこで, この式の両辺に静止質量 m_0 を掛けると

$$m_0 |V'| = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V|$$

になる. 運動質量 m を

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

とすると

$$m_0 |V'| = m |V| \quad (17.28)$$

になる。(17.28) は、静止系の観測者 A から見て任意の方向に等速度 v で運動する質点 D の静止質量を m_0 とし、 A から見た運動質量を m とすると、運動質量は任意の方向の等速度 v に依存し、運動量は座標変換で不変であることを示している。

「17.2 速度と運動量の座標変換と質量」で証明された

$$m_0 |V'| = m |V| \quad \left(: m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (17.15)$$

と (17.28) は同じ式であるが、(17.15) の速度 v は x 軸方向の速度であり、(17.28) の速度 v は x, y, z 軸成分を合成した速度である。

17.4 4 元速度と 4 元運動量

前の単元で、4 次元時空で速度は座標変換で不変ではないことを証明したが、相対性理論では座標変換で不変な 4 次元時空の速度を「4 元速度」という。そして、4 元速度を説明するときに、「各々の座標系の時間の代わりに固有時間 $\tau = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ を使って速度を求めると、速度の絶対値が座標変換で不変になるので、静止系も運動系も共通の時間 τ を使う」と書かれている。

まず、相対性理論で 4 元速度を導き出した方法を説明する。ただし、新八元数を使う。「17.2 速度と運動量の座標変換と質量」で説明したように、静止した観測者 A から見た質点 D の速度を $V(V_t h, V_x i, V_y j, V_z k)$ とし、 A の x 軸方向に等速度 v で直線運動をする観測者 B から見た D の速度を $V'(V'_t h, V'_x i, V'_y j, V'_z k)$ とする。 A から見て B の速度 v と D の x 軸方向の速度 V_x が同じときは

$$|V'| = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V| \quad (17.9)$$

になるので、座標変換で不変な 4 元速度にならない。そこで、論理的根拠はないが固有時間 τ を使って V'_t, V'_x, V'_y, V'_z を作ってみる。このとき、 dt' を使って計算した V'_t, V'_x, V'_y, V'_z と区別するために $d\tau$ を使って求めた 4 元速度を U'_t, U'_x, U'_y, U'_z と書くことにする。新ローレンツ変換

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.4)$$

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

と $V_t = cdt/dt$ から

$$\begin{aligned} U'_t &= \frac{cdt'}{d\tau} \\ &= \frac{cdt - c(v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{cdt/dt - (v/c)dx/dt}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{V_t - (v/c)V_x}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.29)$$

$$\begin{aligned} U'_x &= \frac{dx'}{d\tau} \\ &= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{dx/dt - (v/c)cdt/dt}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{V_x - (v/c)V_t}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.30)$$

$$\begin{aligned} U'_y &= \frac{dy'}{d\tau} \\ &= \frac{dy + (v/c)dz}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{dy/dt + (v/c)(dz/dt)h}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.31)$$

$$\begin{aligned} U'_z &= \frac{dz'}{d\tau} \\ &= \frac{dz - (v/c)dy}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{dz/dt - (v/c)(dy/dt)h}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.32)$$

である.

(17.29), (17.30), (17.31), (17.32) を使って, 質点 D の速度 U' の絶対値 $|U'|$ を計算すると

$$\begin{aligned}
|U'|^2 &= (U'_t h + U'_x i + U'_y j + U'_z k)(U'_t h - U'_x i - U'_y j - U'_z k) \\
&= -U'^2_t + U'^2_x + U'^2_y + U'^2_z \\
&= -\left(\frac{V_t - (v/c)V_x}{1 - v^2/c^2}\right)^2 + \left(\frac{V_x - (v/c)V_t}{1 - v^2/c^2}\right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - (v/c)^2}\right)^2 + \left(\frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \\
&\quad \times [-V_t^2 + 2(v/c)V_t V_x - (v/c)^2 V_x^2 + V_x^2 - 2(v/c)V_t V_x + (v/c)^2 V_t^2 \\
&\quad + V_y^2 + 2(v/c)V_y V_z h - (v/c)^2 V_z^2 + V_z^2 - 2(v/c)V_z V_y h - (v/c)^2 V_y^2] \\
&= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} \\
&\quad \times [-(1 - v^2/c^2)V_t^2 + (1 - v^2/c^2)V_x^2 + (1 - v^2/c^2)V_y^2 + (1 - v^2/c^2)V_z^2] \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} (-V_t^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) \\
&= \frac{1}{1 - v^2/c^2} |V|^2
\end{aligned}$$

になる。よって、 $c > v$ のとき

$$|U'| = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} |V| \quad (17.33)$$

である。ただし、(17.33) の左辺の U' は質点 D の微小固有時間 $d\tau$ で割った速度であり、右辺の V は静止系の観測者 A の微小時間 dt で割った速度である。

先に説明したように、相対性理論では各々の観測者の時間の代わりに質点 D の固有時間 τ を使ってすべての速度を計算して 4 元速度とよぶ。そこで、静止系の観測者 A が観測した D の速度 V を微小固有時間 $d\tau$ で計算しなおした 4 元速度を U と書くと、 U_x と V_x の関係は

$$\begin{aligned}
U_x &= \frac{dx}{d\tau} \\
&= \frac{dx}{dt \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} V_x
\end{aligned} \quad (17.34)$$

になる。 U_t , U_y , U_z も同様に計算して

$$U_t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} V_t, \quad U_y = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} V_y, \quad U_z = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} V_z \quad (17.35)$$

である．よって、(17.34) と (17.35) から (17.33) は

$$|U'| = |U| \quad (17.36)$$

になり、4 元速度は座標変換で不変になる．また、 D の静止質量 m_0 を (17.36) の両辺に掛けると

$$m_0 |U'| = m_0 |U| \quad (17.37)$$

になる．ここで、 $m_0 |U|$ を 4 元運動量と定義すると、4 元運動量は座標変換で不変になる．

また、(17.34) と (17.35) を前に求めた

$$U'_t = \frac{V_t - (v/c)V_x}{1 - v^2/c^2} \quad (17.29)$$

$$U'_x = \frac{V_x - (v/c)V_t}{1 - v^2/c^2} \quad (17.30)$$

$$U'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2} \quad (17.31)$$

$$U'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2} \quad (17.32)$$

に当てはめると 4 元速度の座標変換の式

$$U'_t = \frac{U_t - (v/c)U_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$U'_x = \frac{U_x - (v/c)U_t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$U'_y = \frac{U_y + (v/c)U_z h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$U'_z = \frac{U_z - (v/c)U_y h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

を求めることができる．これが相対性理論の結論である．

以上の証明は論理的に見えるが、結果がうまくいくから固有時間 τ を使うということとは数学的ではない．理由は不明だが自分が希望する結果が出たからよしとする理論では真実の一部しか理解できない．

「17.1 座標変換で不変な物理量の形」の (3) で説明したように

$$E' = \frac{E - (v/c)F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.1)$$

$$F' = \frac{F - (v/c)E}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.2)$$

$$G' = \frac{G + (v/c)Hh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.3)$$

$$H' = \frac{H - (v/c)Gh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.4)$$

の形にすれば、どんな物理量も座標変換で不変になる。そこで、ある物理量が座標変換で不変かどうかを別の方法で証明した後に (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形に書かなければならない。固有時間 τ を使って (17.1), (17.2), (17.3), (17.4) の形の 4 元速度の変換式を作り、その式を元に座標変換の不変性を主張することは、論理的ではない。そこで、次の単元で 4 元速度の欠点を説明する。

17.5 4 元速度の欠点

「17.2 速度と運動量の座標変換と質量」で証明した「4 次元時空で速度は座標変換で不変ではない」という結論と前の単元の「4 元速度は座標変換で不変である」という結論を比較すると、4 元速度と 4 元運動量の理論には以下の四つの欠点がある。

- (1) 4 元運動量では質量が運動で変化しない。
- (2) 4 元速度を座標変換で不変にするために固有時間 τ を使って速度を計算しているので、4 元速度の座標変換不変性は証明されていない。
- (3) 観測者 B の速度 v の方向は観測者 A の x 軸方向であり質点 D の速度の方向は 4 次元時空の任意の方向なのに、 B と D が一致した場合を考えている。
- (4) 質点 D と一緒に運動している観測者 B にとって D の速度は 0 のはずなのに、 B が観測した D の速度 U'_t, U'_x, U'_y, U'_z を考えている。

次に上記の 4 元速度と 4 元運動量の欠点について検討する。

4 元速度の欠点 (1) 「4 元運動量では質量が運動で変化しない」については

$$m_0 |U'| = m_0 |U| \quad (17.37)$$

から明らかなように質量は常に一定である。質量が速度で変化することは相対性理論の別の分野で証明されているので、4 元速度は時空の性質を表していない便宜的な概念と考えられる。

4 元速度の欠点 (2) 「4 元速度を座標変換で不変にするために固有時間 τ を使って速度を計算しているので、4 元速度の座標変換不変性は証明されていない」については、「17.1 座標変換で不変な物理量の形」で説明したように、座標変換の式の形以外の方法で 4 元速度の座標変換不変性を証明しなければならない。

すべての速度の計算に質点 D の固有時間 τ を使う数学的根拠がないことを証明するために、固有時間 τ の代わりに静止した観測者 A の時間 t を使っても、座標変換で不変な 4 元速度を作ることができることを以下で証明する。

「10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理」で説明したように、新ローレンツ変換の微小量は

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.21)$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.22)$$

$$dy' = \frac{dy + (v/c)dz}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.23)$$

$$dz' = \frac{dz - (v/c)dy}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.24)$$

である。(10.21), (10.22), (10.23), (10.24) を観測者 A の微小時間 dt で割ると

$$\begin{aligned} V'_t &= \frac{cdt'}{dt} \\ &= \frac{cdt - (v/c)dx}{dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c - (v/c)dx/dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{c - (v/c)V_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (17.38)$$

$$\begin{aligned} V'_x &= \frac{dx'}{dt} \\ &= \frac{dx - vdt}{dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{dx/dt - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{V_x - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (17.39)$$

$$\begin{aligned} V'_y &= \frac{dy'}{dt} \\ &= \frac{dy + (v/c)dz}{dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{dy/dt + (v/c)(dz/dt)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{V_y + (v/c)V_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (17.40)$$

$$\begin{aligned}
V'_z &= \frac{dz'}{dt} \\
&= \frac{dz - (v/c)dy}{dt\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&= \frac{dz/dt - (v/c)(dy/dt)}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\
&= \frac{V_z - (v/c)V_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}
\end{aligned} \tag{17.41}$$

になる.

次に, (17.38), (17.39), (17.40), (17.41) を使って $|V'|^2$ を計算すると

$$\begin{aligned}
|V'|^2 &= (V'_t h + V'_x i + V'_y j + V'_z k)(V'_t h - V'_x i - V'_y j - V'_z k) \\
&= -V_t'^2 + V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2 \\
&= -\left[\frac{c - (v/c)V_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 + \left[\frac{V_x - v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 \\
&\quad + \left[\frac{V_y + (v/c)V_z h}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 + \left[\frac{V_z - (v/c)V_y h}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^2 \\
&= \frac{1}{1-v^2/c^2} \\
&\quad \times [-c^2 + 2c(v/c)V_x - (v/c)^2 V_x^2 + V_x^2 - 2vV_x + v^2 \\
&\quad + V_y^2 + 2(v/c)V_y V_z h - (v/c)^2 V_z^2 + V_z^2 - 2(v/c)V_z V_y h - (v/c)^2 V_y^2] \\
&= \frac{1}{1-v^2/c^2} [-c^2 - (v/c)^2 V_x^2 + V_x^2 + v^2 + V_y^2 - (v/c)^2 V_z^2 + V_z^2 - (v/c)^2 V_y^2] \\
&= \frac{1}{1-v^2/c^2} [-c^2(1-v^2/c^2) + V_x^2(1-v^2/c^2) + (V_y^2 + V_z^2)(1-v^2/c^2)] \\
&= -c^2 + V_x^2 + V_y^2 + V_z^2
\end{aligned}$$

である. $V_t = c dt/dt = c$ なので上の式は

$$\begin{aligned}
|V'|^2 &= -V_t'^2 + V_x'^2 + V_y'^2 + V_z'^2 \\
&= (V_t h + V_x i + V_y j + V_z k)(V_t h - V_x i - V_y j - V_z k) \\
&= |V|^2
\end{aligned}$$

になり

$$|V'| = |V|$$

である.

この式から, 質点 D の固有時間 τ の代わりに静止した観測者 A の時間 t を使ってすべての速度を計算しても, 速度は座標変換で不変になることがわかる. つまり, 座標

変換で不変な 4 元速度を求める計算で固有時間 τ を使わなければならない理由はないのである。

「17.1 座標変換で不変な物理量の形」で説明したように、ある物理量の式の分母に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ があれば、その物理量は座標変換で不変になる。質点 D の固有時間 τ を使って求めた速度の式も、静止した観測者 A の時間 t を使って求めた速度の式も、分母に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ を持っているので座標変換で不変になるのである。別の方法で座標変換不変性を証明せずに、分母に $\sqrt{1-v^2/c^2}$ を持つ式にして 4 元速度や 4 元運動量の座標変換の不変性を主張しているだけである。そこで、4 元速度を使う時は運動で質量が変化しないという矛盾した結果になっている。

次に、4 元速度の欠点 (3) 「観測者 B の速度 v の方向は観測者 A の x 軸方向であり質点 D の速度の方向は 4 次元時空の任意の方向なのに、 B と D が一致した場合を考えている」について説明する。相対性理論のローレンツ変換には観測者 B の速度が任意の方向のときの一般式は存在せず、 B の速度は常に静止系の観測者 A の x 軸方向である。観測者 B の速度の y, z 軸成分は存在しない。それに対して、質点 D の速度は y, z 軸成分を持つ。ローレンツ変換を 4 元速度に適用する過程で、速度 v の方向が証明なしに任意の方向に変わっている。これに対して、「17.3 一般の速度と運動量の座標変換と質量」では、新ローレンツ変換の一般式を使って観測者 B の速度 v の方向が任意の場合について証明した。

4 元速度の欠点 (4) 「質点 D と一緒に運動している観測者 B にとって D の速度は 0 のはずなのに、 B が観測した D の速度 $U(U'_t, U'_x, U'_y, U'_z)$ を考えている」について説明する。相対性理論では観測者 B は質点 D に限りなく近づいてはいるが一致してはいないと考ええる。一致していないから D の速度の四つの座標成分が観測できると考える。しかし、 B が D に一致したから、速度を求めるときに D の固有時間 τ を使ったので、この理論は数学的ではない。また、質点 D と一緒に運動している観測者 B から見て、ある瞬間に D が微小距離 $ds(cdt, dx, dy, dz)$ 動いたと考えて速度を求めることもするが、この理論も明確な根拠がない。

純粋に数学的な理論からは、「17.3 一般の速度と運動量の座標変換と質量」で証明したように、速度は座標変換で不変ではなく、運動量が不変である。そして、そのとき、質量は速度によって変化する。「運動量の座標変換不変性」と「速度による質量の変化」の両方が成り立つ理由と「速度の時間成分」の意味は、「18.1 質量は単位世界線の時間成分である」で 4 次元時空図を使って証明する。

今後、この本では速度や加速度を計算するときに、質点の時間は固有時間 τ を使い、観測者の時間は時間 t を使う。相対性理論の 4 元速度、4 元加速度、4 元運動量、4 元力の場合だけすべての速度の計算に固有時間 τ を使うことにする。

17.6 運動量保存の法則

「17.3 一般の速度と運動量の座標変換と質量」で運動量の座標変換不変性を説明したが、この単元では運動量保存の法則を説明する。「運動量の座標変換不変性」は運動量の絶対値がどの座標から観測しても一定であることを意味するが、「運動量保存の法則」は、運動の変化の前後で運動量の各座標成分の和が一定であることを意味する。二つの言葉は似ているが、意味は異なる。運動量保存の法則は相対性理論で証明されているが、この単元では新八元数を使って運動量保存の法則を証明する。また相対性理論では3次元空間で質点と観測者が一緒に運動する場合を扱うが、新八元数では質点の x 軸方向の速度と観測者の速度が一致する場合を使って説明する。ただし、説明を簡単にするために、虚数 i, j, k は使わず、負の世界の成分を表すときに虚数 h を使う。

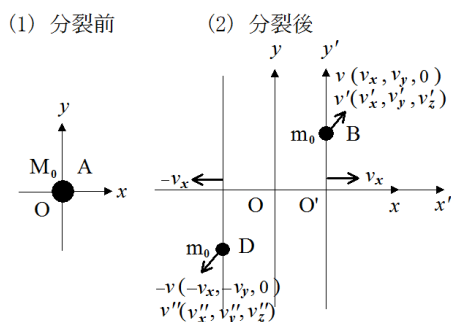


図 17.2

図 17.2 のように、静止している観測者 O の x, y, z 座標の原点 O に静止質量 M_0 の質点 A が静止していたと仮定する。 z 軸は省略する。次に内部の爆発で A が静止質量 m_0 の質点 B と静止質量 m_0 の質点 D に分裂したとする。分裂は x - y 平面内で起こったと仮定する。そのときの B の速度を $v(v_x, v_y, 0)$ とすると、対称性から D の速度は $-v(-v_x, -v_y, 0)$ になる。また、 B の x 軸方向の速度 v_x と同じ速度で x 軸上を運動する観測者 O' がいたとする。 O' の座標軸を x', y', z' 軸とするが、図 17.2 では z' 軸を省略する。

M_0, m_0 は静止質量なので、それぞれの運動質量を M, m とする。「17.2 速度と運動量の座標変換と質量」で説明したように、運動質量と静止質量の関係は

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (17.11)$$

になる。ただし、 v は 3 次元空間速度であり 4 元速度ではない。

まず、静止している観測者 O から見た運動量保存の法則を証明する。分裂前の A の速度は $(0, 0, 0)$ であり、分裂後の B の速度は $v(v_x, v_y, 0)$ で D の速度は

$-v(-v_x, -v_y, -0)$ である。よって、分裂の前後での x, y, z 軸方向の運動量の総和を計算すると

$$M_0 \times 0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} v_x + \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} (-v_x)$$

$$M_0 \times 0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} v_y + \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} (-v_y)$$

$$M_0 \times 0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \times 0 + \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v_x^2 + v_y^2)/c^2}} \times 0$$

になるので、運動量の x, y, z 成分について運動量保存の法則が成り立つ。

次に、 x 軸方向に速度 v_x で運動する観測者 O' から見ても運動量保存の法則が成り立つかどうかを調べる。「**10.5 新ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理**」で説明したように、ある質点の速度が静止している観測者 O から $V(V_x, V_y, V_z)$ に観測され、速度 v で x 軸方向に運動している観測者 O' から $V'(V'_x, V'_y, V'_z)$ に観測されたとすると、 V と V' の関係は

$$V'_x = \frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.25)$$

$$V'_y = \frac{V_y + (v/c)V_z}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.26)$$

$$V'_z = \frac{V_z - (v/c)V_y}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.27)$$

である。

図 17.2 で、 O' から見た D の速度を $v''(v''_x, v''_y, v''_z)$ とすると、 O から見た D の速度は $-v(-v_x, -v_y, 0)$ なので、(10.25), (10.26), (10.27) で $v \rightarrow v_x, V_x \rightarrow -v_x, V_y \rightarrow -v_y, V_z \rightarrow 0, V'_x \rightarrow v''_x, V'_y \rightarrow v''_y, V'_z \rightarrow v''_z$ に置き換えて

$$\begin{aligned} v''_x &= \frac{-v_x - v_x}{1 + (v_x/c^2)v_x} \\ &= \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.42)$$

$$v''_y = \frac{-v_y}{1 + v_x^2/c^2} \quad (17.43)$$

$$v''_z = \frac{(v_x v_y/c)h}{1 + v_x^2/c^2} \quad (17.44)$$

になる。(17.42), (17.43), (17.44) から

$$\begin{aligned} v''^2 &= v_x''^2 + v_y''^2 + v_z''^2 \\ &= \frac{4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2}{(1 + v_x^2/c^2)^2} \end{aligned} \quad (17.45)$$

である.

同様に O' から見た B の速度を $v'(v'_x, v'_y, v'_z)$ とすると, O から見た B の速度は $v(v_x, v_y, 0)$ なので, (10.25), (10.26), (17.27) で $v \rightarrow v_x, V_x \rightarrow v_x, V_y \rightarrow v_y, V_z \rightarrow 0, V'_x \rightarrow v'_x, V'_y \rightarrow v'_y, V'_z \rightarrow v'_z$ に置き換えて

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v_x}{1 - v_x^2/c^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17.46)$$

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x^2/c^2} \quad (17.47)$$

$$v'_z = \frac{-(v_x v_y/c)h}{1 - v_x^2/c^2} \quad (17.48)$$

になる. (17.46), (17.47), (17.48) から

$$\begin{aligned} v'^2 &= v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \\ &= \frac{v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2}{(1 - v_x^2/c^2)^2} \\ &= \frac{v_y^2(1 - v_x^2/c^2)}{(1 - v_x^2/c^2)^2} \\ &= \frac{v_y^2}{1 - v_x^2/c^2} \end{aligned} \quad (17.49)$$

である.

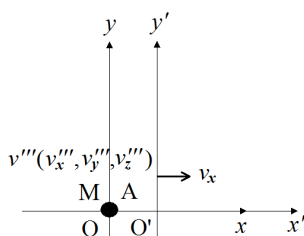


図 17.3

また, 図 17.3 のように, O' から見た分裂する前の A の速度を $v'''(v'''_x, v'''_y, v'''_z)$ とすると, O から見た A の速度は $v(0, 0, 0)$ なので, (10.25), (10.26), (10.27) で $v \rightarrow v_x, V_x \rightarrow 0, V_y \rightarrow 0, V_z \rightarrow 0, V'_x \rightarrow v'''_x, V'_y \rightarrow v'''_y, V'_z \rightarrow v'''_z$ に置き換えて

$$v'''_x = -v_x \quad (17.50)$$

$$v'''_y = 0 \quad (17.51)$$

$$v'''_z = 0 \quad (17.52)$$

になる. (17.50), (17.51), (17.52) から

$$\begin{aligned} v'''^2 &= v_x'''^2 + v_y'''^2 + v_z'''^2 \\ &= v_x^2 \end{aligned} \quad (17.53)$$

である.

(17.45), (17.49), (17.53) をまとめて書くと

$$v''^2 = \frac{4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2 / c^2}{(1 + v_x^2 / c^2)^2} \quad (17.45)$$

$$v'^2 = \frac{v_y^2}{1 - v_x^2 / c^2} \quad (17.49)$$

$$v'''^2 = v_x^2 \quad (17.53)$$

である. これらの速度を使って, 次に証明する運動量保存の法則の運動質量を計算することが出来る.

O' から見た x 軸方向の運動量保存則を検討する前に, y 軸と z 軸方向の運動量保存則を検討する. O' から見た分裂前の A の y 軸方向の運動量を p_y'' , 分裂後の B と D の y 軸方向の運動量をそれぞれ p_y' , p_y' とする. 運動量の一般式

$$p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

の v^2 を (17.49) で置き換え, v_y を前に求めた

$$v_y' = \frac{v_y}{1 - v_x^2 / c^2} \quad (17.47)$$

で置き換えて

$$\begin{aligned} p_y' &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - [v_y^2 / (1 - v_x^2 / c^2)] / c^2}} \times \frac{v_y}{1 - v_x^2 / c^2} \\ &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2 / c^2)^2 - (1 - v_x^2 / c^2)^2 [v_y^2 / (1 - v_x^2 / c^2)] / c^2}} \\ &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2 / c^2)^2 - (1 - v_x^2 / c^2) v_y^2 / c^2}} \\ &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2 / c^2) [(1 - v_x^2 / c^2) - v_y^2 / c^2]}} \\ &= \frac{m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2 / c^2)(1 - v_x^2 / c^2 - v_y^2 / c^2)}} \end{aligned} \quad (17.54)$$

になる. 同様に, 前に求めた

$$v_y'' = \frac{-v_y}{1 + v_x^2/c^2} \quad (17.43)$$

$$v''^2 = \frac{4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2}{(1 + v_x^2/c^2)^2} \quad (17.45)$$

から

$$\begin{aligned} p_y'' &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - [(4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2)/(1 + v_x^2/c^2)^2] / c^2}} \times \frac{-v_y}{1 + v_x^2/c^2} \\ &= \frac{-m_0 v_y}{\sqrt{(1 + v_x^2/c^2)^2 - (4v_x^2/c^2 + v_y^2/c^2 - v_x^2 v_y^2/c^4)}} \\ &= \frac{-m_0 v_y}{\sqrt{1 + 2v_x^2/c^2 + v_x^4/c^4 - 4v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2 + v_x^2 v_y^2/c^4}} \\ &= \frac{-m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)^2 - v_y^2/c^2(1 - v_x^2/c^2)}} \\ &= \frac{-m_0 v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)(1 - v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2)}} \end{aligned} \quad (17.55)$$

になる. 同様に, 前に求めた

$$v_y''' = 0 \quad (17.51)$$

$$v''^2 = v_x^2 \quad (17.53)$$

から

$$\begin{aligned} p_y''' &= \frac{M_0}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17.56)$$

になる. (17.54), (17.55), (17.56) から

$$p_y' + p_y'' = 0 = p_y'''$$

になる. つまり, y 軸方向の運動量保存則が成り立つ.

z 軸方向の運動量は (17.54), (17.55) で分子の v_y を $-v_x v_y h/c$ に置き換えた式になるので

$$p_z' + p_z'' = 0 = p_z'''$$

になる. つまり, z 軸方向の運動量保存則が成り立つ.

次に, x 軸方向の運動量保存則を検討する. O' から見た分裂前の A の x 軸方向の運動量を p_x''' , 分裂後の B と D の x 軸方向の運動量をそれぞれ p_x' , p_x'' とする. 前に求めた

$$v_x' = 0 \quad (17.46)$$

$$v'^2 = \frac{v_y^2}{1 - v_x^2/c^2} \quad (17.49)$$

から

$$\begin{aligned} p_x' &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - [v_y^2/(1 - v_x^2/c^2)]/c^2}} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17.57)$$

である. 同様に, 前に求めた

$$v_x'' = \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2} \quad (17.42)$$

$$v''^2 = \frac{4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2}{(1 + v_x^2/c^2)^2} \quad (17.45)$$

から

$$\begin{aligned} p_x'' &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - [(4v_x^2 + v_y^2 - v_x^2 v_y^2/c^2)/(1 + v_x^2/c^2)^2]/c^2}} \times \frac{-2v_x}{1 + v_x^2/c^2} \\ &= \frac{-2m_0 v_x}{\sqrt{(1 + v_x^2/c^2)^2 - (4v_x^2/c^2 + v_y^2/c^2 - v_x^2 v_y^2/c^4)}} \\ &= \frac{-2m_0 v_x}{\sqrt{1 + 2v_x^2/c^2 + v_x^4/c^4 - 4v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2 + v_x^2 v_y^2/c^4}} \\ &= \frac{-2m_0 v_x}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)^2 - v_y^2/c^2(1 - v_x^2/c^2)}} \\ &= \frac{-2m_0 v_x}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)(1 - v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2)}} \end{aligned} \quad (17.58)$$

になる. 同様に, 前に求めた

$$v_x''' = -v_x \quad (17.50)$$

$$v'''^2 = v_x^2 \quad (17.53)$$

から

$$\begin{aligned}
 p_x''' &= \frac{M_0}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \times (-v_x) \\
 &= \frac{-M_0 v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}
 \end{aligned} \tag{17.59}$$

である. (17.57), (17.58), (17.59) から

$$p_x' + p_x'' - p_x''' = \frac{-2m_0 v_x}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)(1 - v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2)}} - \frac{-M_0 v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \tag{17.60}$$

になる.

(17.60) が 0 になるためには何が必要かを考えてみる.

$$p_x' + p_x'' - p_x''' = 0$$

とすると (17.60) から

$$\begin{aligned}
 \frac{2m_0 v_x}{\sqrt{(1 - v_x^2/c^2)(1 - v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2)}} &= \frac{M_0 v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \\
 \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2 - v_y^2/c^2}} &= M_0
 \end{aligned} \tag{17.61}$$

である. 質点 B の速度 v は $v = v_x^2 + v_y^2 + 0$ なので (17.61) は

$$\frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = M_0 \tag{17.62}$$

になる. v が c に比べて限りなく小さいときは

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} &\div 1 - (v^2/c^2)(-1/2) \\
 &= 1 + (v^2/c^2)/2
 \end{aligned}$$

なので (17.62) は

$$2m_0 + 2m_0(v^2/c^2)/2 \div M_0$$

になる. 両辺に c^2 を掛けて

$$M_0 c^2 \div 2m_0 c^2 + 2m_0 v^2/2 \tag{17.63}$$

である.

アインシュタインの相対性理論で証明されているが、静止質量 m_0 はエネルギー E に変換すると

$$E = m_0 c^2$$

である。これは、「18.1 質量は単位世界線の時間成分である」で4次元時空図を使って証明される。(17.63)の左辺は分裂前の A の静止エネルギーを表す。右辺の第1項は B と D の静止エネルギーの合計を表し、第2項は B と D のニュートン力学の運動エネルギーの合計である。つまり、(17.63)は質点 A の静止エネルギーが質点 B と質点 D の静止エネルギーと運動エネルギーに変わったことを示している。この証明から得られた結論は相対性理論の結論と同じである。このことは新八元数を使った計算で矛盾が生じないことを示している。

以上の議論では、速度は固有時間を使った4元速度ではなく観測者それぞれの時間を使った速度で計算している。その理由は、4元速度を使うと質量が速度で変化しないため、静止質量 M_0 が分裂後の静止質量 m_0 の2倍と運動エネルギー $m_0 v^2/2$ の2倍になるという結論を導くことができないからである。このことから、4元速度が実際の物理現象を表さず、計算の便利のために考えられた速度であることがわかる。

また、最初の分裂時に加えられたエネルギーが分裂後の運動エネルギーになっただけではないかと考える読者もいるだろうが、例えば分裂に火薬を使ったとしても火薬の質量は最初の静止質量 M_0 に含まれているので、質量がエネルギーに変わったと考えることができる。分裂に使われたエネルギーは外部から加えられたのではない。

17.7 加速度と4元加速度

この単位では、等速運動をしている観測者から見た加速度を扱う。相対性理論と同じ仮定を使うが、計算は新八元数で行う。

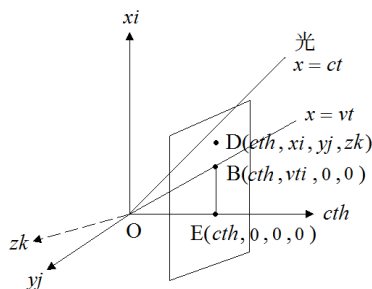


図 17.4

図 17.4 で、静止系の観測者 E の x 軸方向に観測者 B が等速度 v で運動し、 B から見た質点 D は加速度運動をしていると仮定する。 B が D に近づき一致したときは、 B が D の加速度を測定することはできないはずである。なぜなら、自分で自分の加速

度を測定することはできないからである。一般相対性理論の有名な思考実験に「エレベーターの自由落下」がある。紐が切れて自由落下しているエレベーターの中の人、エレベーターとの関係が変化しないので重力加速度を感じることはできないという話である。しかし、特殊相対性理論では自分で自分の加速度を測定し固有加速度とよぶのである。この矛盾を解決するために、特殊相対性理論では B が D に限りく近づいた極限の場合を考えるのではなく、 D と一緒に運動している B がある瞬間に静止して D の加速度を測定した場合を考えて、これを「瞬間静止系」とよんでいる。しかし、この本では B が D に限りなく近づいた極限の場合を考える。そのとき、時間 t' は D の固有時間 $\tau = t\sqrt{1-v^2/c^2}$ に限りなく近づくので dt' の代わりに $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ を使う。

新ローレンツ変換の式は

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.3)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.4)$$

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

なので、微小量は

$$dt' = \frac{dt - (v/c^2)dx}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.21)$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.22)$$

$$dy' = \frac{dy + (v/c)dzh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.23)$$

$$dz' = \frac{dz - (v/c)dyh}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (10.24)$$

である。固有速度を求めるために (10.21), (10.22), (10.23), (10.24) を微小固有時間 $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ で割ると

$$\begin{aligned} V'_t &= \frac{cdt'}{d\tau} \\ &= \frac{cdt - c(v/c^2)dx}{\sqrt{1-v^2/c^2}dt\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{cdt/dt - (v/c)dx/dt}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{c - (v/c)V_x}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{17.64}$$

$$\begin{aligned}
V'_x &= \frac{dx'}{d\tau} \\
&= \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{dx/dt - (v/c)cdt/dt}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{V_x - v}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{17.65}$$

$$\begin{aligned}
V'_y &= \frac{dy'}{d\tau} \\
&= \frac{dy + (v/c)dz}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{dy/dt + (v/c)hdz/dt}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{V_y + (v/c)V_z h}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{17.66}$$

$$\begin{aligned}
V'_z &= \frac{dz'}{d\tau} \\
&= \frac{dz - (v/c)dy}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{dz/dt - (v/c)hdy/dt}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{V_z - (v/c)V_y h}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{17.67}$$

になる. ただし, V_x , V_y , V_z は観測者 E の微小時間 dt を使って求めた速度である.

観測者 B が質点 D に限りなく近づいた極限の場合の D の加速度 a' も V' を固有時 τ で割って計算する. ただし, 静止系の観測者 E から見た D の加速度は V を時間 t で割り a と書く. (17.64), (17.65), (17.66), (17.67) から

$$\begin{aligned}
a'_t &= \frac{dV'_t}{d\tau} \\
&= \frac{0 - (v/c)dV_x}{(1 - v^2/c^2)dt\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{-(v/c)dV_x/dt}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-(v/c)a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \quad (17.68)$$

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{dV'_x}{d\tau} \\ &= \frac{dV_x - 0}{(1-v^2/c^2)dt\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{dV_x/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (17.69)$$

$$\begin{aligned} a'_y &= \frac{dV'_y}{d\tau} \\ &= \frac{dV_y + (v/c)hdV_z}{(1-v^2/c^2)dt\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{dV_y/dt + (v/c)hdV_z/dt}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{a_y + (v/c)a_zh}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (17.70)$$

$$\begin{aligned} a'_z &= \frac{dV'_z}{d\tau} \\ &= \frac{dV_z - (v/c)hdV_y}{1-v^2/c^2dt\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ &= \frac{a_z - (v/c)a_yh}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (17.71)$$

になる.

次に, 加速度を表す新八元数 $a' = a'_th + a'_xi + a'_yj + a'_zk$ と $a = a_th + a_xi + a_yj + a_zk$ を使い加速度が座標変換で不変かどうかを調べる. (17.68), (17.69), (17.70), (17.71) から

$$\begin{aligned} |a'|^2 &= (a'_th + a'_xi + a'_yj + a'_zk)(a'_th - a'_xi - a'_yj - a'_zk) \\ &= -a'^2_t + a'^2_x + a'^2_y + a'^2_z \\ &= \frac{1}{(1-v^2/c^2)^3} \left\{ -(v/c)^2 a_x^2 + a_x^2 + [a_y + (v/c)a_zh]^2 + [a_z - (v/c)a_yh]^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(1-v^2/c^2)^3} \left[-(v/c)^2 a_x^2 + a_x^2 + a_y^2 - (v/c)^2 a_z^2 + a_z^2 - (v/c)^2 a_y^2 \right] \\ &= \frac{1}{(1-v^2/c^2)^3} (1-v^2/c^2)(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \\ &= \frac{1}{(1-v^2/c^2)^2} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \end{aligned}$$

になる. $V_t = cdt/dt = c$ から $a_t = dV_t/dt = 0$ なので上の式は

$$\begin{aligned}
 |a'|^2 &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} (0 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \\
 &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} (-a_t^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) \\
 &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} (a_th + a_xi + a_yj + a_zk)(a_th - a_xi - a_yj - a_zk) \\
 &= \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^2} |a|^2
 \end{aligned}$$

になる. よって

$$|a'| = \frac{|a|}{1 - v^2/c^2} \quad (17.72)$$

である. (17.72) から, 加速度は座標変換で不変ではないことがわかる.

恒岡美和先生の「明解 相対性理論入門」によれば, 相対性理論では静止系から見た加速度も運動する質点の固有時間 τ で計算し, これを 4 元加速度とよび A と書く. 4 元加速度は 4 元速度と同じように座標変換で不変になる. そのことを以下に説明する.

「17.4 4 元速度と 4 元運動量」で説明したようにすべての速度を固有時間 τ で計算して得られる 4 元速度 U_x は $U_x = dx/d\tau$ なので, 静止系から見た加速度 A は

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{dU_x}{d\tau} \\
 &= \frac{d(dx/d\tau)}{d\tau} \\
 &= \frac{d(dx/dt \sqrt{1 - v^2/c^2})}{dt \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \times \frac{d(dx/dt)}{dt} \\
 &= \frac{1}{1 - v^2/c^2} \times \frac{dV_x}{dt} \\
 &= \frac{a_x}{1 - v^2/c^2}
 \end{aligned}$$

になる. 他の固有加速度 A_t, A_y, A_z も同様に計算して

$$\begin{aligned}
 A_t &= \frac{a_t}{1 - v^2/c^2} \\
 A_y &= \frac{a_y}{1 - v^2/c^2} \\
 A_z &= \frac{a_z}{1 - v^2/c^2}
 \end{aligned}$$

になる. また, a'_t, a'_x, a'_y, a'_z は固有時間 τ を使って計算したので

$$A'_t = a'_t, A'_x = a'_x, A'_y = a'_y, A'_z = a'_z$$

になるので, (17.72) は

$$|A'| = |A| \quad (17.73)$$

になる. ただし, A, A' はベクトルではなく 4 元加速度を表す新八元数である. よって, 4 元加速度は座標変換で不変である. 以上の結果は相対性理論の結果と一致しており, 新八元数による計算から矛盾が生じないことを示している.

17.8 力と 4 元力

恒岡美和先生の「明解 相対性理論入門」に従って, ニュートンの力を F , 4 次元時空の座標変換で不変な 4 元力を f と書くことにする. ただし, この本では F, f はベクトルではなく新八元数である.

「17.7 加速度と 4 元加速度」で説明したように, 静止系の観測者 E から見た質点 D の加速度 a と質点に限りなく近い観測者 B から見た質点の加速度 a' の関係は

$$|a'| = \frac{|a|}{1 - v^2/c^2} \quad (17.72)$$

である. ただし, a' は質点の固有時間 τ を使い, a は静止した観測者 E の時間 t を使って求めた. (17.72) の両辺に静止質量 m_0 を掛けると

$$\begin{aligned} m_0 |a'| &= \frac{m_0 |a|}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \times \frac{|a|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (17.74)$$

である. 静止しているが D から見ると運動している E が観測する D の質量, つまり運動質量 m は

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

なので, (17.74) は

$$m_0 |a'| = \frac{m |a|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.75)$$

になる.

ニュートン力 F を

$$F = ma$$

と定義すると, D に限りなく近い B から見た D の質量は静止質量 m_0 であり, 質点に働く力 F' は

$$F' = m_0 a'$$

なので, (17.75) から

$$|F'| = \frac{|F|}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.76)$$

である. (17.76) からニュートン力は座標変換で不変ではないことがわかる.
 前の単元で説明したように, 固有時間 τ を使って計算した 4 元加速度は

$$|A'| = |A| \quad (17.73)$$

なので, (17.73) の両辺に m_0 を掛けて

$$m_0 |A'| = m_0 |A| \quad (17.77)$$

になる. 座標変換で不変な 4 元力 f を

$$f = m_0 A$$

と定義すると (17.77) から

$$|f'| = |f| \quad (17.78)$$

である. (17.78) から 4 元力は座標変換で不変であることがわかる. ただし, 4 元力の定義では質量は運動で変化しないので相対性理論の「質量は速度により変化する」という結論と一致しない. このことは, 4 元力 f はニュートンの運動方程式 $F = ma$ を座標変換で不変にするために考えられた架空の力であることを示唆している.

18. 新八元数と質量

18.1 質量は単位世界線の時間成分である

ニュートン力学は「静止空間の存在」と「時間の均一性」を前提にして成り立っている。運動の基準となる静止した空間があり、その空間に対する差が運動である。また、時間がどの場所でも均一に経過するので、複数の観測者の時刻に差がない。しかし、ユークリッドが「原論」に書いたように自然界の法則を公理と定理に分けて厳密に考えれば、「静止空間の存在」と「時間の均一性」を保障するものは何も無く、経験的に正しいと考えられていただけである。数学的には、これら二つの前提は公理であって定理ではない。公理は証明することはできないが経験的に正しいと考えられている法則なので、いつでも否定される可能性がある。

ニュートンに対してアインシュタインは、光速で運動する人が光を観測したら光の速度はどうなるかを考え、質点の時間と距離が観測者の速度で変化するというローレンツ変換にたどりついた。アインシュタインにとって「静止空間の存在」と「時間の均一性」は公理ではなかったのである。「13.1 公理と定理の必要性」で説明したように、公理を疑うことから新しい学問が生まれるのである。

ニュートン力学の「静止空間の存在」(絶対空間)と「時間の均一性」(絶対時間)を否定し、「時間と距離の相対性」を発見したアインシュタインであるが、質量については「質量は存在する」(絶対質量)という公理で相対性理論を作っている。質量は時間や空間から影響を受けて大きさを変えるが、質量そのものは最初から存在していることを前提にしている。そして、質量が何であるかについては答えていない。つまり、質量は時間や距離とは別の物理量であると考えているので、質量の単位を時間 t と距離 x だけで表すことはできない。質量がエネルギーに変換される式 $E = mc^2$ があるが、エネルギーは運動エネルギーの式 $E = mv^2/2$ からわかるように質量を前提にしているので、質量を時間 t と距離 x だけで表したわけではない。また、速度による運動質量の変化の式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.11)$$

も、質量が何かについては答えていない。一般相対性理論では質量が空間を曲げて重力が生まれると説明されているが、その理論も質量の存在を前提にしている。つまり、相対性理論は「質量は存在する」を公理に採用して、質量の起源については答えていないのである。ニュートンが絶対空間と絶対時間を考えたように、アインシュタインは絶対質量を考えている。

しかし、公理は歴史的に否定され運命にある。この単元で説明するように、新八元数と4次元時空図を使って考えれば、「質量は存在する」という公理は否定され、「質量は単位世界線の時間成分である」ことが明らかになる。そして、質量の単位は[距離]であり、速度により質量が変化する式(17.11)が成り立つ理由も4次元時空図を使って証明できる。また、矛盾がないからという理由で、相対性理論では「4次元時空の運動量の時間成分 p_t を c 倍したものがエネルギーである」と説明されるが、この理論も「質量は単位世界線の時間成分である」という公理から自然に導かれる。以下に、このことを証明する。

物質を構成する最小の粒子(素粒子) B が、静止している観測者 A の x 軸方向に等速度 v で運動していると仮定すると、4次元時空図は図 18.1 のようになる。

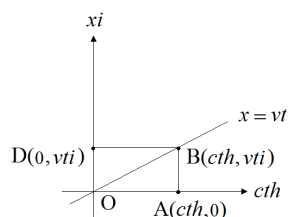


図 18.1

y 軸と z 軸は省略する。 B から cth 軸に平行に引いた直線の xi 軸との交点を D とする。 B の世界線の方程式は $x = vt$ であり、 A , B , D の新八元数は $A = cth$, $B = cth + vti$, $D = vti$ である。原点 O と B の距離を $|OB|$ とすると $c > v$ のとき

$$\begin{aligned} |OB| &= \sqrt{BB} \\ &= \sqrt{(cth + vti)(cth - vti)} \\ &= cth\sqrt{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \quad (18.1)$$

である。

「世界線の1単位の長さ」を η (エータ) とする。ただし、 η は実数である。(18.1) から $|OB|$ は虚数なので $|OB|$ の単位世界線の長さを $\eta \times h = \eta h$ として、そのときの B の座標を $B_0(ct_0h, vt_0i)$ とすると(18.1)から

$$\eta h = ct_0h\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

になる。よって

$$t_0 = \frac{\eta}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.2)$$

である。

$$|OB_0| = \eta h$$

のときの A の座標を A_0 とすると (18.2) から

$$\begin{aligned} A_0 &= ct_0 h \\ &= \frac{\eta h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (18.3)$$

である.

ここで, 世界線の 1 単位の長さ η について考える. η は, この単元で説明するように素粒子の質量と関係するので観測できないほど短いと考えられる. それは「**20.4 5 次元時空とひも理論**」で説明する「ひも」の長さと同程度かもしれない. そして, η は物理学の基本定数の一つになる可能性があるので, 量子力学の重要な基本定数であるプランク定数と関係することが予想される.

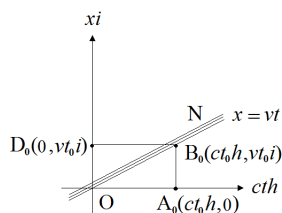


図 18.2

また, 図 18.2 のように, 静止質量 m_0 の物質を構成する素粒子 B が N 個あると仮定すると, B の周囲の世界線の本数は N 本である. 今後は世界線が 1 本のときは素粒子 B とよび, 世界線が N 本のときは物質 B とよぶ. また, 素粒子は種類により質量が異なることから 1 本の世界線の太さも素粒子ごとに違うと考えられる. 「**8.3 光の世界距離が 0 であることの解釈と光速不変の原理**」で説明したように, 素粒子の世界線が光と同じように波であると考ええると波の振幅 Ψ が世界線の太さに相当し, 素粒子の質量の違いを生んでいると考えられる. しかし, 証明を簡単にするために以下の計算では Ψ を省略する.

公理「質量は単位世界線の時間成分である」から, 静止質量 m_0 は B から見た B の単位時間成分の長さ $|OB_0| = \eta h$ の N 倍に変換係数 δ (デルタ) を掛けて

$$m_0 = \delta N \eta h \quad (18.4)$$

である. 変換係数 δ を掛ける理由は, 質量 m_0 の国際単位 g (グラム) と英米の単位ポンドは基準が違うように $N\eta h$ と g は基準が違うことである.

そして, 運動質量 m は A が観測する $|OB_0|$ の時間成分 A_0 の δN 倍なので, (18.3) から

$$\begin{aligned}
m &= \delta N A_0 \\
&= \frac{\delta N \eta h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned} \tag{18.5}$$

になる. (18.4) と (18.5) から

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

の関係が導かれる. この式は相対性理論の結論

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{17.11}$$

と一致する.

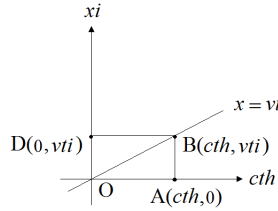


図 18.1

図 18.1 で素粒子 B の速度 v が大きくなると直線 $x = vt$ の傾きが大きくなる. このとき, 前に計算した式

$$t_0 = \frac{\eta}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{18.2}$$

で分母が小さくなり t_0 は大きくなる. そこで, 原点 O から単位世界距離 η の点 B_0 は原点から離れていき, $|OB_0|$ の時間成分 $|OA_0|$ が大きくなる. $|OA_0|$ は運動質量を表すので, 速度 v が増すと運動質量 m が増していく. これが, 速度の増加に伴う運動質量増加の理由である.

また, 4次元時空では [時間] は ct の形にして [距離] に変換するので, 公理「質量は単位世界線の時間成分である」が正しいと考えると質量の単位は [距離] になる.

ここで大切なことは, (18.4), (18.5) からわかるように, 我々が住む正の世界では質量が虚数であることである. 前に計算した

$$\begin{aligned}
|OB| &= \sqrt{B\bar{B}} \\
&= \sqrt{(cth + vti)(cth - vti)} \\
&= cth\sqrt{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \tag{18.1}$$

を負の世界の新八元数 $B = ct + vthi$ を使って計算すると, $c > v$ のとき

$$\begin{aligned}
 |OB| &= \sqrt{B\bar{B}} \\
 &= \sqrt{(ct + vthi)(ct - vthi)} \\
 &= \sqrt{c^2t^2 - v^2t^2} \\
 &= ct\sqrt{1 - v^2/c^2}
 \end{aligned} \tag{18.6}$$

になる. つまり, 負の世界では質量が実数になる. 「11.4 2重構造を持つ4次元時空」で説明したように我々は時間と距離が虚数の世界に住んでいるので, 世界線の時間成分である質量も虚数になるのである.

我々の世界の質量を実数にする方法は, (18.6) を求めた計算のように我々の世界点が $ct + xhi + yhj + zhk$ であり負の世界の世界点が $cth + xi + yj + zk$ であると考えることである. しかし, 我々の世界点を $ct + xhi + yhj + zhk$ とした場合, 3次元空間の距離の絶対値の2乗は

$$(xhi + yhj + zhk)(-xhi - yhj - zhk) = -x^2 - y^2 - z^2$$

から負になり, 観測結果と一致しない. よって, 正の世界の世界点が $cth + xi + yj + zk$ であると考えほうが妥当であると考えられる. その場合に質量は虚数になり, 次の単元で証明するようにエネルギーも虚数になる.

18.2 エネルギーと運動量

図 18.2 で δNA_0 が物質 B の運動質量 m を表すことがわかったのであるが, 相対性理論の有名な式 $E = mc^2$ を使うと, δNA_0c^2 は物質 B のエネルギー E を表すことになる. つまり, 「エネルギーは単位世界線の時間成分を c^2 倍したものである」という定理が成り立つ. ただし, 世界線の本数 N と変換係数 δ , 世界線の振幅 Ψ を掛けなければならない. 以下の証明では世界線の Ψ は省略する. この法則が定理である理由は, 公理「質量は単位世界線の時間成分である」と定理 $E = mc^2$ から導かれたことである. c^2 が必要な理由は, 「18.4 $E = mc^2$ の c の意味」で説明する.

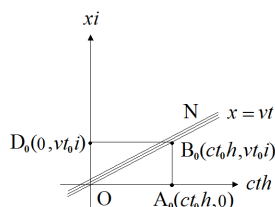


図 18.2

理論的根拠はないが矛盾が生じないので、相対性理論では4次元時空の運動量の時間成分 p_t を c 倍した $p_t c$ がエネルギー E であると説明される。相対性理論ではベクトルで表示されるが、新八元数で書くと次のようになる。エネルギーを E と書き、 x , y , z 軸方向の運動量を p_x , p_y , p_z と書くと、4次元時空の運動量を表す新八元数 p は

$$\begin{aligned} p &= p_t h + p_x i + p_y j + p_z k \\ &= (E/c)h + p_x i + p_y j + p_z k \end{aligned} \quad (18.7)$$

である。ただし、この式では E , p_x , p_y , p_z を実数と仮定しているが、以下の証明ではその仮定を使わない。また、 p_t , p_x , p_y , p_z は観測者 A の時間 t を使って計算した運動量であり、物質 B の固有時間 τ を使って計算した4元運動量ではない。

相対性理論の本を読む人の中で厳密な論理的思考をする人は、4次元時空の運動量の時間成分 p_t を c 倍したものがエネルギー E であるといきなり定義されて困惑するかもしれない。しかし、図 18.2 で世界線の時間成分が質量であることと質量とエネルギーの関係式 $E = mc^2$ からエネルギーが時間成分であることを理解できるだろう。そして、次に図 18.2 の x 軸成分である $vt_0 i$ を δN 倍すれば x 軸方向の運動量 p_x になることに気づくだろう。ただし、質量を c^2 倍したものがエネルギーであり、(18.7) から運動量 p_x はエネルギー E の $1/c$ 倍なので

$$p_x = \delta N vt_0 i \times c^2 \times 1/c = \delta N vt_0 ci$$

になるだろうと予測される。つまり、「運動量は単位世界線の x , y , z 軸成分を c 倍したものである」という定理が考えられる。次にこの式を証明する。

$|OB_0| = \eta$ のときの D の座標を D_0 とすると

$$D_0 = vt_0 i$$

であり、 N 本の世界線の x 軸成分の合計は

$$ND_0 = Nvt_0 i$$

になる。式を変形すると

$$\begin{aligned} ND_0 &= Nvt_0 i \\ &= Nct_0 hvi/(ch) \end{aligned}$$

である。両辺に変換係数 δ を掛けると

$$\delta ND_0 = \delta Nct_0 hvi/(ch)$$

になる。 $\delta Nct_0 h$ は、公理「質量は単位世界線の時間成分である」から物質 B の運動質量 m なので

$$\delta ND_0 = mvi/(ch) \quad (18.8)$$

になる.

ところで, 以前に求めた式

$$m = \frac{\delta N \eta h}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.5)$$

から質量 m は虚数 h を含んでいるので, ニュートンの運動量の定義 $p_x = mv$ をそのまま使うと p_x は虚数 h を持ち時間成分になってしまう. そこで, $p_x = mvi/h$ と定義すると質量 m がもつ虚数 h が消えて p_x が x 座標の虚数 i を持つ. この $p_x = mvi/h$ を (18.8) に代入すると

$$\delta N D_0 = p_x / c$$

になる. 式を変形すると

$$p_x = \delta N D_0 c$$

なので, 予測どおり「運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分を c 倍したものである」という定理が成り立つ. ただし, 世界線の本数 N と変換係数 δ を掛けなければならない. 「18.4 $E = mc^2$ の c の意味」で説明するが, 相対性理論の時間 ct を使うと c を必要とせず, 「運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分である」になる.

18.3 4次元時空の質量とエネルギーの総和

現代物理学では, 宇宙は最初, 無でありビッグバンにより誕生したと考えられている. その理論によれば, 最初が無なのだから今も宇宙の質量の総和は0のはずである. しかし, 現実には物質が存在する. その理由は, 最初に生まれた正の質量と負の質量が衝突して消える過程で正の質量が少し多かったからであると説明されている. つまり, 実数の正負の2種類の質量があると考えられている.

しかし, 「18.1 質量は単位世界線の時間成分である」で説明したように, 我々が住む正の世界の質量は正の虚数であり, 重なって存在する負の世界の質量が正の実数である. 新八元数を使った時空理論では, 正の虚数の質量と正の実数の質量しか存在しない. では, この質量理論はビッグバン理論に合わないのだろうか. 結論を先にいうと, 矛盾はない. そのことを以下に証明する.

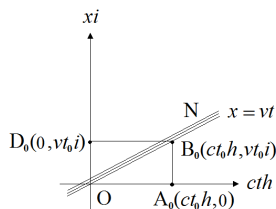


図 18.2

図 18.2 でわかるように, 運動質量 m は $|OA_0|$ であり物質 B の速度 v が変われば変化する. なぜなら, 直線 $x = vt$ の傾きが変わるので, 単位世界線の ct 軸成分, つまり時間成分が変わるからである. それに対して, 静止質量 m_0 は単位世界線 $|OB_0|$ なので直線 $x = vt$ の傾きが変わっても変化しない. つまり, 宇宙に存在する質量は静止質量 m_0 だけであり, 運動質量 m は観測者に依存する見かけの質量である.

物質 B の座標で見ると, B の世界線上の原点 O から単位長さ ηh の点の座標は, 正の世界では $(\eta h, 0, 0, 0)$ であり負の世界では $(\eta, 0, 0, 0)$ である. 正の世界の B の質量を m_0 , 負の世界の質量を m'_0 とすると

$$m_0 = \delta N \eta h \quad (18.4)$$

$$m'_0 = \delta N \eta \quad (18.9)$$

である. ただし, δ は変換係数である. (18.4) と (18.9) から

$$\begin{aligned} m_0^2 + m'^2_0 &= (\delta N \eta h)^2 + (\delta N \eta)^2 \\ &= -\delta^2 N^2 \eta^2 + \delta^2 N^2 \eta^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

になる. つまり, 正と負の世界の静止質量の 2 乗の総和は 0 になる. 質量はエネルギーなので, エネルギーの 2 乗の総和も 0 になる.

このことから, ある物理量の宇宙全体の総和を計算するときは正負で考えるのではなく, 2 乗で計算しなければならないことがわかる. 正負で考えれば簡単であるが, 宇宙は我々が望むような単純な姿をしていないようである. ただし, この結論は新八元数を使って求められたので, 新八元数が間違っていれば現代物理学の常識のように質量は正負の 2 種類かもしれない.

18.4 $E = mc^2$ の c の意味

質量とエネルギーの変換式 $E = mc^2$ の c に特別な意味を求める人がいるかも知れないが, 計算の都合で c が必要とされるだけで, $E = m$ と書いてもよいことを証明する.

ニュートン力学と相対性理論の大きな違いの一つは, 相対性理論では時間 t を ct として距離の単位に変換して計算することである. 物理量の単位を調べることを次元解析というが, ct に次元解析を行うと

$$\begin{aligned} ct &= \frac{[\text{距離}]}{[\text{時間}]} [\text{時間}] \\ &= [\text{距離}] \end{aligned}$$

になる.

そこで、ニュートン力学の運動量の定義

$$p_x = m \frac{dx}{dt}$$

で dt を cdt に変えた運動量を p_c と書き「新八元数運動量」とよび、さらにその x 軸成分を p_{cx} と書くと

$$p_{cx} = m \frac{dx}{cdt} = \frac{p_x}{c} \quad (18.10)$$

である。「18.2 エネルギーと運動量」で証明した式

$$p_x = \delta N D_0 c$$

と (18.10) から

$$\begin{aligned} p_{cx} &= \frac{p_x}{c} \\ &= \delta N D_0 c / c \\ &= \delta N D_0 \end{aligned}$$

である。この式から、図 18.2 の D_0 そのものが素粒子 B の新八元数運動量であることがわかる。ただし、世界線の本数 N と変換係数 δ を掛けた。定理「運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分を c 倍したものである」の c は、ニュートン力学で時間 t を使って速度を計算することから発生しているだけで、 ct を使って速度を計算すれば、定理「新八元数運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分である」になる。

同様にニュートン力学の運動エネルギーの式

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

で dt を cdt に変えた運動エネルギーを E_c と書き「新八元数運動エネルギー」とよぶと

$$E_c = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{cdt} \right)^2 = \frac{E}{c^2} \quad (18.11)$$

である。相対性理論の結論 $E = mc^2$ と (18.11) から

$$E_c = \frac{mc^2}{c^2} = m$$

になる。つまり、運動量と同じように t の代わりに ct を使えば、定理「エネルギーは単位世界線の時間成分を c^2 倍したものである」は「新八元数エネルギーは単位世界線の時間成分であり質量と同じである」に変わる。

$E = mc^2$ の c^2 に特別な意味はなく、本来 ct で速度を計算すべきなのに習慣的に t で計算するので c^2 が現れただけである。将来、我々が日常生活で ct を使うように統一されれば、 $E = mc^2$ は $E = m$ に書き換えられ、4次元時空図を使って質量とエネル

ギー, 運動量は図示されるだろう. そして, エネルギー E と運動量 p_x に $1/c$ 倍の差がある状況も無くなり, 同じ単位 [距離] になるだろう. そのときには [距離] 以外の単位は存在しないので, 単位という概念そのものがなくなるだろう.

18.5 光の質量とヒッグス粒子

相対性理論では, 光は静止質量は持たないが運動質量と運動量は持つ. 静止質量を持たない光が運動時にだけ質量をもつということは, 説明されても具体的な像を描くことができない. しかし, 「質量は単位世界線の時間成分である」という公理と 4 次元時空図を使えば, 簡単に理解できる.

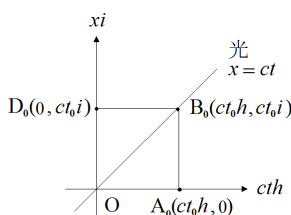


図 18.3

静止している観測者 A の x 軸方向に放射された光の 4 次元時空図は図 18.3 のようになる. y 軸と z 軸は省略した. 光の世界線の方程式は $x = ct$ である. 新八元数は $cth + xi$ に $x = ct$ を代入して $cth + cti$ になる. そこで, 光の世界線上の点 B の座標は (cth, cti) になり, 光は cth 軸と xi 軸から等距離の点を通る. 原点 O から単位世界線の距離 ηh の点を $B_0(ct_0h, ct_0i)$ とする. 公理「質量は単位世界線の時間成分である」と定理「エネルギーは単位世界線の時間成分を c^2 倍したものである」と「運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分を c 倍したものである」から, 光の静止質量 m_0 は $\delta |OB_0|$ であり, 運動質量 m は δA_0 になる. また, エネルギー E は $\delta A_0 c^2$, 運動量 p は $\delta D_0 c$ である. ただし, δ は 4 次元時空の質量単位を我々が使う国際質量単位に変換する係数である. $|A_0|$ と $|D_0|$ は A_0, D_0 の実数値と同じになるので A_0, D_0 を使う. B はそのままでは実数値が不明なので $|OB_0|$ を使う.

光の静止質量 m_0 を計算する. $B_0 = ct_0h + ct_0i$ なので

$$\begin{aligned}
 m_0 &= \delta |OB_0| \\
 &= \delta \sqrt{(ct_0h + ct_0i)(ct_0h - ct_0i)} \\
 &= \delta ct_0h \sqrt{1 - (ct_0i)^2 / (ct_0h)^2} \\
 &= \delta ct_0h \sqrt{1 - 1} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

である. つまり, 光の原点 O からの距離は 0 である. よって, ηh の長さの単位世界線がないため静止質量が 0 になる.

では、運動質量 m はどうなるだろうか。図 18.3 で明らかなように、 cth 軸成分は存在し 0 ではない。よって、運動質量は存在する。ただし、原点 O から単位世界線の距離 ηh の点 B_0 が定まらないため $ct_0 h$ も不定である。

光以外の質点の運動エネルギーは質量と速度が一定であればニュートン力学の式 $E = mv^2/2$ のように一定になる。しかし、光は速度 c は一定であるのに振動数によりエネルギーが変わる。光のエネルギーを E 、振動数を ν （ニュー）、プランク定数を $\bar{h}$ （正しくは h と書くのであるが、新八元数の h と区別するために $\bar{h}$ と書いた）とすれば

$$E = \bar{h}\nu \quad (18.12)$$

である。

前に説明したように光では運動質量 m を示す $\delta ct_0 h$ が不定であるので、どんな運動質量、つまりエネルギーもとることができる。これが、光のエネルギーが (18.12) のように振動数に比例して変わり、速度が一定なのにどんな値でもとることができる理由である。

定理「エネルギーは単位世界線の時間成分を c^2 倍したものである」から、光のエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \delta ct_0 \times c^2 \\ &= \delta c^3 t_0 \end{aligned} \quad (18.13)$$

である。ただし、プランク定数 $\bar{h}$ と間違えないように虚数 h は省略した。(18.12) と (18.13) から

$$\begin{aligned} \delta c^3 t_0 &= \bar{h}\nu \\ ct_0 &= \frac{\bar{h}\nu}{\delta c^2} \end{aligned} \quad (18.14)$$

である。(18.14) から、振動数 ν の光の単位世界線の cth 軸成分 A_0 は $\bar{h}\nu/(\delta c^2)$ であることが推測される。

また、定理「運動量は単位世界線の x, y, z 軸成分を c 倍したものである」から振動数 ν の光の運動量 p は空間虚数 i を省略すると

$$\begin{aligned} p &= \delta ct_0 \times c \\ &= \delta c^2 t_0 \end{aligned}$$

である。この式に (18.14) を代入して

$$p = \delta c \times \frac{\bar{h}\nu}{\delta c^2} = \frac{\bar{h}\nu}{c}$$

である。この結果は相対性理論の結果と一致している。

光が静止質量を持たず不定な運動質量、つまり $\bar{h}\nu$ という不定なエネルギーを持つことを 4 次元時空図を使わずに計算だけで証明することもできる。静止質量 m_0 と運動質量 m の関係式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.11)$$

で $v = c$ のとき

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - c^2/c^2}} = \frac{m_0}{0}$$

になる。この式で m が意味のある数になるためには $m_0 = 0$ でなければならない。つまり、光の静止質量は 0 である。このとき

$$m = \frac{0}{0} \quad (18.15)$$

になる。(18.15) を変形すると $m \times 0 = 0$ になり、 m が何であつても成り立つので m の値は不定である。よつて光のエネルギー mc^2 も不定になり、 $mc^2 = \bar{h}\nu$ とすると光は振動数に依存したどんな値のエネルギーでもとることができる。

次にヒッグス粒子について検討する。ヒッグス粒子は素粒子の研究者が探し求めて来た粒子であり、素粒子に質量を与える粒子である。宇宙がビッグバンで誕生した直後は、全ての粒子は質量を持たずに自由に運動していたが、光以外の素粒子はヒッグス粒子との相互作用で速度が遅くなり質量を持ったと考えられている。

「8.3 光の世界距離が 0 の解釈と光速不変の原理」で説明した公理「光と物質の世界線の違いは通過場所の違いだけである」を正しいと考えると、座標平面で ct 軸と x 軸から等距離の点を通過する世界線の方程式は $x = ct$ になるので速度 c をもつ。また、等距離ではない点を通過する世界線の方程式は $x = vt$ になり速度 v を持つ。そして $x = ct$ 上の点の世界距離は 0 になるので光は静止質量を持たないが、 $x = vt$ 上の点の世界距離は 0 ではないので質量を持つ。つまり、質量は与えられるのではなく、4 次元時空の通過場所により 0 になったり観測されたりするので、ヒッグス粒子を必要としない。ただし、ビッグバンのときにすべての世界線の世界距離が 0 であればすべて光であり質量を持たない。そのときに、ヒッグス粒子の世界線が光の世界線に衝突して世界距離が 0 ではない軌跡に変えれば、ヒッグス粒子は存在する。しかし、そのためにはビッグバンのときにすでにヒッグス粒子が存在しなければならないので理論が複雑になる。それに対して、光と物質の世界線の違いは通過場所の違いだけであり、光の世界距離は 0 なので光は静止質量を持たないが、物質の世界距離は 0 ではないので質量を持つと考えると理論は単純になる。

18.6 エネルギー保存則の座標変換不変性

物体が衝突するときに、衝突前後の物体のエネルギーの総和が変化しないことをエネルギー保存の法則という。「17.6 運動量保存の法則」で証明したように、衝突の前後で x, y, z 軸方向の運動量の総和は変化せず、しかも、座標を変えてもこの法則が成り立つという座標変換不変性がある。運動量についての証明は相対性理論の本に書かれているが、エネルギー保存の法則の座標変換不変性を証明している本が見つからない。運動量の時間成分 p_t の c 倍がエネルギー E であり、 x, y, z 軸方向のそれぞれの運動量の総和は座標変換で不変なので、エネルギー E の総和も座標変換で不変だろうと考えることは自然であるが、数学的に証明されたわけではない。この單元では、エネルギー保存の法則の座標変換不変性を新八元数を使って証明する。

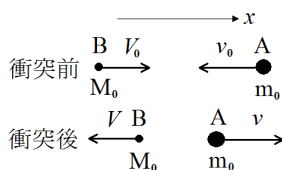


図 18.4

図 18.4 のように、静止質量 m_0 と M_0 の二つの球 A と B が速度 v_0 と V_0 で衝突し、衝突後の速度が v と V になったと仮定する。質量とエネルギーの関係式 $E = mc^2$ と静止質量と運動質量の関係式

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (17.11)$$

から、エネルギー保存の法則は

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18.16)$$

である。(18.16) は静止した観測者から見た式なので、衝突後に速度 v で運動する物質 A の座標で観測しても (18.16) が成り立つことが証明できれば、エネルギー保存の法則の座標変換不変性を証明したことになる。

衝突の状況を世界線で表すと次のページの図 18.5 のようになる。衝突の瞬間を原点 O にすると、衝突前の A と B の世界線の方程式は $x = v_0 t$ と $x = V_0 t$ であり、衝突後は $x = vt$, $x = Vt$ である。

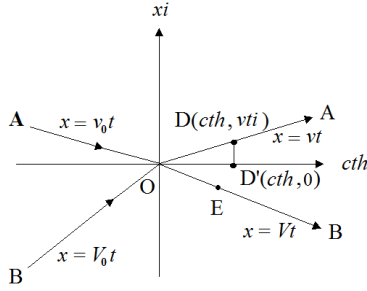


図 18.5

衝突後に速度 v で運動する物質 A の座標に座標変換するということは、衝突後の A の世界線 $x = vt$ 上の点 $D(cth, vti)$ を $x = 0$ の世界線、つまり cth 軸上の点 $D'(cth, 0)$ に移すことである。この変換を表す新八元数を H とすると、 $D = cth + vti$ 、 $D' = cth$ なので

$$(cth + vti)H = cth$$

である。式を変形すると

$$\begin{aligned} H &= \frac{cth}{cth + vti} \\ &= \frac{cth(cth - vti)}{(cth + vti)(cth - vti)} \\ &= \frac{cth(cth - vti)}{(cth)^2(1 - v^2/c^2)} \\ &= \frac{1 - vti/(cth)}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{1 + vhi/c}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \tag{18.17}$$

になる。

次に、 H を使って物質 B の世界線 $x = Vt$ を座標変換する。 A から見た B の速度、つまり座標変換後の B の速度を V' とすると、世界線の方程式は $x' = V't'$ になり世界線上の点の座標は $(ct'h, V't'i)$ なので

$$ct'h + V't'i = (cth + Vti)H$$

である。(18.17) を代入すると

$$ct'h + V't'i = (cth + Vti) \frac{1 + vhi/c}{1 - v^2/c^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{cth - vti + Vti - Vvth/c}{1 - v^2/c^2} \\
&= \frac{(1 - Vv/c^2)cth + (V - v)ti}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned}$$

になる. 係数を比較して

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{(1 - Vv/c^2)t}{1 - v^2/c^2} \\
V't' &= \frac{(V - v)t}{1 - v^2/c^2}
\end{aligned}$$

である. t' を消去すると

$$V' = \frac{V - v}{1 - Vv/c^2}$$

になる. つまり, 座標変換後の B の世界線の方程式 $x' = V't'$ は

$$x' = \frac{(V - v)t'}{1 - Vv/c^2} \quad (18.18)$$

になる. V' の式は「**10.4 ローレンツ変換による速度の式と光速不変の原理**」で説明したローレンツ変換の速度の変換式

$$\frac{V_x - v}{1 - (v/c^2)V_x} \quad (10.16)$$

と同じなので, 新八元数による座標変換の正しさを示している.

次に, (18.18) から座標変換後の物質 B の質量とエネルギーの式を求める. 世界線 (18.18) 上で原点 O から単位距離 ηh の点を $E'(ct'h, x'i)$ とすると

$$\begin{aligned}
|\eta h|^2 &= |OE'|^2 \\
&= (ct'h + x'i)(ct'h - x'i)
\end{aligned}$$

から

$$-\eta^2 = -c^2 t'^2 + x'^2 \quad (18.19)$$

である. (18.19) に (18.18) を代入して

$$\begin{aligned}
-\eta^2 &= -c^2 t'^2 + \frac{(V - v)^2 t'^2}{(1 - Vv/c^2)^2} \\
&= \frac{-c^2 t'^2 (1 - Vv/c^2)^2 + (V - v)^2 t'^2}{(1 - Vv/c^2)^2} \\
&= \frac{-c^2 t'^2 (1 - 2Vv/c^2 + V^2 v^2/c^4) + (V^2 - 2Vv + v^2) t'^2}{(1 - Vv/c^2)^2} \\
&= \frac{-c^2 t'^2 + 2Vv t'^2 - V^2 v^2 t'^2/c^2 + V^2 t'^2 - 2Vv t'^2 + v^2 t'^2}{(1 - Vv/c^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-c^2 t'^2 - V^2 v^2 t'^2 / c^2 + V^2 t'^2 + v^2 t'^2}{(1 - Vv/c^2)^2} \\
&= \frac{-c^2 t'^2 (1 - v^2/c^2) + V^2 t'^2 (1 - v^2/c^2)}{(1 - Vv/c^2)^2} \\
&= \frac{-c^2 t'^2 (1 - v^2/c^2) (1 - V^2/c^2)}{(1 - Vv/c^2)^2}
\end{aligned}$$

になる.

式を変形すると $V < c$, $v < c$ の条件で

$$\begin{aligned}
c^2 t'^2 &= \frac{\eta^2 (1 - Vv/c^2)^2}{(1 - v^2/c^2)(1 - V^2/c^2)} \\
ct' &= \frac{\eta(1 - Vv/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.20)
\end{aligned}$$

である. よって, 原点 O から単位距離 ηh の点 E' を表す新八元数は (18.18) と (18.20) から

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{\eta(1 - Vv/c^2)h}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\eta(V - v)(1 - Vv/c^2)i}{(1 - Vv/c^2)c\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{\eta(1 - Vv/c^2)h}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\eta(V - v)i}{c\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}
\end{aligned}$$

である. この式の虚数 h の項が運動質量とエネルギーを表し, i の項が運動量を表すので, 座標変換後の A からみた B の運動質量は世界線の本数を N とし質量変換係数を δ とすると

$$\frac{\delta N \eta (1 - Vv/c^2) h}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.21)$$

である. ただし, 世界線の振幅 Ψ は考えない.

物質 A の世界線の本数を n とすると衝突前の A の静止質量は $m_0 = \delta n \eta h$ なので, 座標変換後の衝突前の A の運動質量は (18.21) で $N \rightarrow n$, $V \rightarrow v_0$ にして

$$A \text{ 前: } \frac{\delta n \eta (1 - v_0 v/c^2) h}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0 (1 - v_0 v/c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 同様に衝突前の B の静止質量は $M_0 = \delta \eta N h$ なので, 座標変換後の衝突前の B の運動質量は (18.21) で $V \rightarrow V_0$ にして

$$B \text{ 前: } \frac{\delta N \eta (1 - V_0 v/c^2) h}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{M_0 (1 - V_0 v/c^2)}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である. 衝突後の A の運動質量は座標変換後は (18.21) で $N \rightarrow n$, $V \rightarrow v$ にして

$$A \text{ 後: } \delta n \eta h = m_0$$

である．衝突後の B の運動質量は座標変換後は (18.21) なので

$$B \text{ 後: } \frac{\delta N \eta (1 - Vv/c^2) h}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{M_0 (1 - Vv/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

になる．よって，座標変換後のエネルギー保存の法則の式は，それぞれの質量に c^2 を掛けて

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c^2 (1 - v_0 v/c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2 (1 - V_0 v/c^2)}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= m_0 c^2 + \frac{M_0 c^2 (1 - Vv/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (18.22)$$

である．

座標変換前のエネルギー保存の式

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18.16)$$

と，「**17.6 運動量保存の法則**」で証明した運動量保存の式

$$\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{M_0 V_0}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18.23)$$

から (18.22) を導くことができれば，エネルギー保存の法則の座標変換不変性が証明されたことになる．そのために，(18.16) と (18.23) から (18.22) を導く．

エネルギー保存の式 (18.16) を $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ で割ると

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0 c^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (18.24)$$

になる．運動量保存の式 (18.23) に

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

を掛けると

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 v_0 v}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 V_0 v}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m_0 v^2}{1 - v^2/c^2} + \frac{M_0 V v}{\sqrt{1 - V^2/c^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (18.25)$$

になる. (18.24) から (18.25) を引くと

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c^2 (1 - v_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{M_0 c^2 (1 - V_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ &= \frac{m_0 c^2 (1 - v^2 / c^2)}{1 - v^2 / c^2} + \frac{M_0 c^2 (1 - V v / c^2)}{\sqrt{1 - V^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{aligned}$$

になり, 変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c^2 (1 - v_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{M_0 c^2 (1 - V_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ &= m_0 c^2 + \frac{M_0 c^2 (1 - V v / c^2)}{\sqrt{1 - V^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{aligned}$$

になる. この式は, 座標変換後の世界線の単位長さ ηh から求めたエネルギー保存の式

$$\begin{aligned} & \frac{m_0 c^2 (1 - v_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{M_0 c^2 (1 - V_0 v / c^2)}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ &= m_0 c^2 + \frac{M_0 c^2 (1 - V v / c^2)}{\sqrt{1 - V^2 / c^2} \sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{aligned} \quad (18.22)$$

と同じである.

以上の計算結果から, エネルギー保存の式

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V_0^2 / c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \quad (18.16)$$

は, 座標変換不変, つまり, どの座標で計算しても成り立つことが証明された.

18.7 世界線の消滅

「17.6 運動量保存の法則」で, 静止質量 M_0 の物質が内部の爆発で速度 v と $-v$ の静止質量 m_0 の 2 個の物質に分裂する場合を考え, 運動量保存の法則を使って

$$M_0 = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad (17.62)$$

を証明した. この單元では, 公理「質量は単位世界線の時間成分である」とエネルギー保存の法則から (17.62) を導き, さらに世界線が消滅してエネルギーに変わることを証明する.

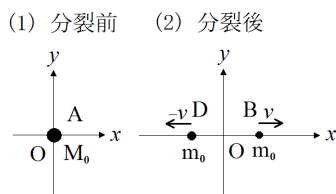


図 18.6

図 18.6 のように x 軸の原点 O に静止質量 M_0 の物質 A があり, A の内部の爆発で静止質量 m_0 の 2 個の物質 B と D に分裂したと仮定する. ただし, x 軸方向に分裂し, 物質 B の速度は v , 物質 D の速度は $-v$ とする. この場合の 4 次元時空図は図 18.7 になる.

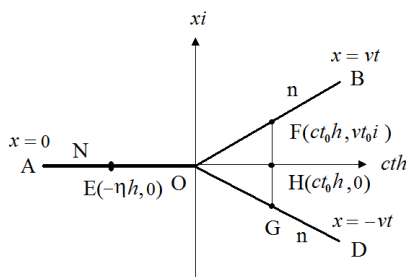


図 18.7

物質 A は静止しているので距離 x は 0 のままであるが時間 t は経過するので, その世界線の方程式は $x = 0$ である. そこで, 物質 A は cth 軸上を左から原点 O に向かう. 分裂の瞬間を原点 O にすると, 分裂後の物質 B の世界線の方程式は $x = vt$ であり, 同様に物質 D の世界線の方程式は $x = -vt$ である.

直線 $x = 0$, $x = vt$, $x = -vt$ 上で原点 O から単位世界線の長さ ηh の距離の点を E , F , G とし, 直線 FG と cth 軸の交点を H とする. H の座標を $(ct_0h, 0)$ とすると F の座標は (ct_0h, vt_0i) なので

$$\begin{aligned}\eta h &= |OF| \\ &= \sqrt{(ct_0h + vt_0i)(ct_0h - vt_0i)} \\ &= ct_0h \sqrt{1 - (vt_0i)^2 / (ct_0h)^2} \\ &= ct_0h \sqrt{1 - v^2/c^2}\end{aligned}$$

になる. よって

$$ct_0 = \frac{\eta}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.26)$$

である.

分裂前の A の世界線の本数を N とし, 分裂後の B と D の世界線の本数をそれぞれ n とすると, 公理「質量は単位世界線の時間成分である」と $E = mc^2$ から, 分裂前のエネルギーは $\delta N |OE| c^2$, 分裂後のエネルギーは $2\delta n |OH| c^2$ である. ただし, δ は質量変換係数である. エネルギー保存の法則から

$$\delta N |OE| c^2 = 2\delta n |OH| c^2$$

なので

$$N|OE| = 2n|OH|$$

である. $|OE| = \eta h$ と $|OH| = ct_0 h$ を代入して

$$N\eta = 2nct_0$$

になる. この式に (18.26) を代入すると

$$N = \frac{2n}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (18.27)$$

になる. (18.27) が分裂前の世界線の本数 N と分裂後の世界線の本数 $2n$ の関係式である. (18.27) を変形すると

$$2n = N\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

である. $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ は 1 よりも小さいので, 分裂後に世界線の本数が減ったことを示している. 消滅した世界線は「**17.6 運動量保存の法則**」で証明したように, 物質 B と D の運動エネルギーに変わったのである.

消滅した世界線が運動エネルギーに変わったことを確認する. 公理「質量は単位世界線の時間成分である」と $E = mc^2$, そして (18.27) から, 分裂前の静止エネルギーと分裂後の静止エネルギーの差は

$$\begin{aligned} M_0c^2 - 2m_0c^2 &= \delta N\eta hc^2 - 2\delta n\eta hc^2 \\ &= \frac{2\delta n\eta hc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 2\delta n\eta hc^2 \\ &\div 2\delta n\eta hc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - 2\delta n\eta hc^2 \\ &= 2\delta n\eta \frac{v^2}{2} h \\ &= 2m_0 \frac{v^2}{2} h \end{aligned} \quad (18.28)$$

になる. $m_0v^2/2$ は物質 B と D それぞれのニュートン力学の運動エネルギーである. よって, 分裂後に消滅した世界線は運動エネルギーにかわったことが確認された.

打ち上げられた花火は内部の火薬の爆発で分裂するが, そのときも花火全体の質量は減少しエネルギーに変わっているのである. 分裂速度が光速に近い場合が核分裂であり, 変換されたエネルギーは莫大なものになる.

18.8 エネルギー運動量関係式

静止している観測者 A から見て、速度 v で等速直線運動している静止質量 m_0 の質点 B があつたとする。このとき、 A の座標から見た B の運動量 p とエネルギー E の関係は

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 p^2 \quad (18.29)$$

である。 $m_0 c^2$ は質点 B の静止エネルギーを表す。ただし、 p は相対論の 4 元運動量ではなくニュートン力学の 3 次元空間運動量である。(18.29) を「エネルギー運動量関係式」といい、相対性理論の本には必ず出てくる。この單元では、新八元数を使って (18.29) を証明する。

「17.2 速度と運動量の座標変換と質量」で証明したように、質点 B の 4 次元時空の運動量

$$mc \frac{dt}{dt} h + m \frac{dx}{dt} i + m \frac{dy}{dt} j + m \frac{dz}{dt} k \quad (18.30)$$

は座標変換で不変である。座標変換で不変とは、 A 、 B それぞれの座標で計算した (18.30) の絶対値が等しいという意味である。ただし、この運動量は A は時間 t 、 B は時間 τ を使って計算するので、固有時間 τ だけで計算する相対性理論の 4 元運動量とは異なる。

運動量の絶対値を、まず、質点 B の座標で計算する。 B の時間は固有時間 τ であり、自分で自分の座標を観測するので $dx = dy = dz = 0$ である。また、質量は静止質量 m_0 である。よって、 B が観測する自分の運動量 p_B と絶対値の 2 乗 $|p_B|^2$ は

$$\begin{aligned} p_B &= m_0 c \frac{d\tau}{d\tau} h + m_0 \frac{0}{d\tau} i + m_0 \frac{0}{d\tau} j + m_0 \frac{0}{d\tau} k \\ &= m_0 c h \\ |p_B|^2 &= m_0^2 c^2 h^2 \\ &= -m_0^2 c^2 \end{aligned} \quad (18.31)$$

である。同様に A の座標から見た B の運動量 p_A と絶対値の 2 乗 $|p_A|^2$ を計算する。時間は t であり質量は運動質量

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

である。また、 x 、 y 、 z 軸方向の運動量を p_x 、 p_y 、 p_z とする。このとき、(18.30) は

$$\begin{aligned} p_A &= mc \frac{dt}{dt} h + m \frac{dx}{dt} i + m \frac{dy}{dt} j + m \frac{dz}{dt} k \\ &= mch + p_x i + p_y j + p_z k \\ |p_A|^2 &= (mch + p_x i + p_y j + p_z k)(mch - p_x i - p_y j - p_z k) \\ &= -m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \end{aligned} \quad (18.32)$$

になる.

座標変換不変性から

$$|p_B|^2 = |p_A|^2$$

なので, (18.31), (18.32) を代入して

$$-m_0^2 c^2 = -m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

になる. $E = mc^2$ とニュートン力学の運動量の式 $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ から

$$-m_0^2 c^2 = -E^2/c^2 + p^2$$

$$E^2/c^2 = m_0^2 c^2 + c^2 p^2$$

である. 両辺に c^2 を掛けて

$$E^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 p^2$$

になる. これがエネルギー運動量関係式 (18.29) の新八元数による証明である.

18.9 $E = mc^2$ を簡単に導く方法

相対性理論の有名な式 $E = mc^2$ を新八元数を使って簡単に求める方法を説明する. ニュートン力学では, 力を F , 距離を x , 時間を t とするとエネルギー E と運動量 p は

$$E = Fx \quad (18.33)$$

$$p = Ft \quad (18.34)$$

である. (18.33) と (18.34) を足したり引いたりするためには, 単位を合わせる必要がある. そこで, (18.34) の両辺に光速 c を掛けて

$$cp = Fct \quad (18.35)$$

にしなければならない. (18.33) と (18.35) の右辺の単位が同じなので, E と cp は同じ単位になり, p を基準にすると, p と E/c は同じ単位になる.

4次元時空の運動量を新八元数で表すと

$$\begin{aligned} m \frac{d}{dt}(cth + xi + yj + zk) &= mc \frac{dt}{dt}h + m \frac{dx}{dt}i + m \frac{dy}{dt}j + m \frac{dz}{dt}k \\ &= mch + p_x i + p_y j + p_z k \end{aligned} \quad (18.36)$$

である. 「18.2 エネルギーと運動量」で説明したように, 4次元時空の運動量 (18.36) の時間成分 mc がエネルギーに相当するので, 運動量の時間成分 mc とエネルギー E の単位を揃えるために E/c を使うと

$$mc = E/c$$

になる. よって

$$E = mc^2$$

である.

19. 超光速時の相対性理論

19.1 超光速時の新ローレンツ変換

「3.5 新複素数によるローレンツ変換の導出」で新ローレンツ変換を求めるときに、 $v > c$ の条件で計算すると超光速時の新ローレンツ変換を求めることができると説明した．実際に計算してみる．観測者 A は原点 O に静止し、観測者 B は A の x 軸の正方向に等速度 v で直線運動をしているとする．また、観測される点 D は距離 x の位置に静止し、時刻 0 のときに A と B は原点 O で一致していたとする．それぞれの座標は $A(cth, 0)$, $B(cth, vti)$, $D(cth, xi)$ なので、新八元数は $A = cth$, $B = cth + vti$, $D = cth + xi$ である．超光速時の時空図は図 19.1 のようになり、 $v > c$ から B の世界線 $x = vt$ は光の世界線 $x = ct$ よりも xi 軸方向に傾いている．

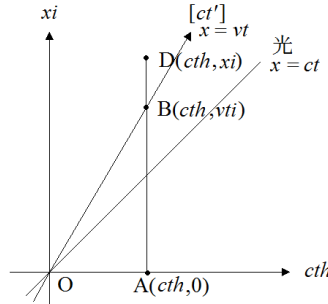


図 19.1

新ローレンツ変換を求めるために座標変換 $D\bar{B}/|B|$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{D\bar{B}}{|B|} &= \frac{(cth + xi)(cth - vti)}{\sqrt{(cth + vti)(cth - vti)}} \\ &= \frac{(cth)^2 - cvt^2hi + xcthi - xvti^2}{\sqrt{(cth)^2 - (vti)^2}} \end{aligned}$$

である． $v > c$, $ct > 0$ なので

$$\frac{D\bar{B}}{|B|} = \frac{(cth)^2 - cvt^2hi + xcthi - xvti^2}{\sqrt{(cth)^2 - (vti)^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(ct)^2 - cvt^2hi + xcthi + xvt}{\sqrt{-c^2t^2 + v^2t^2}} \\
&= \frac{-(ct)^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{\sqrt{c^2t^2(v^2/c^2 - 1)}} \\
&= \frac{-(ct)^2 + xvt - cvt^2hi + xcthi}{ct\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \\
&= \frac{-ct + xv/c - vthi + xhi}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \\
&= \frac{-c(t - xv/c^2) + (x - vt)hi}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \tag{19.1}
\end{aligned}$$

である。hi は実数なので、(19.1) は実数だけの式である。よって、座標変換後の D の世界点は負の世界にあることがわかる。そこで、座標変換後の B から見た D の新八元数を $D' = ct' + x'hi$ とすると、係数比較により

$$\begin{aligned}
ct' &= \frac{-c(t - xv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \\
t' &= \frac{-(t - xv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \tag{19.2}
\end{aligned}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \tag{19.3}$$

である。これが超光速時の新ローレンツ変換の式である。

次に (19.2) と (19.3) の符号を検討する。図 19.1 で質点 D が観測者 B より上にある時、 $x > vt$ である。このとき、(19.3) から

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} > \frac{vt - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = 0$$

なので $x' > 0$ である。(19.2) は

$$t' = \frac{-(t - xv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \frac{xv/c^2 - t}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} > \frac{v^2t/c^2 - t}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = t\sqrt{v^2/c^2 - 1} > 0$$

なので $x > vt$ のときは x' も t' も正である。

これに対して、質点 D が観測者 B より下にある時、つまり $x < vt$ のとき、(19.3) から

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} < \frac{vt - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = 0$$

になるので $x' < 0$ である。(19.2) は $x < vt$ の条件では値が不明のため $x > ct$ の条件で検討すると

$$t' = \frac{-(t - xv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \frac{xv/c^2 - t}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} > \frac{vt/c - t}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} = \frac{t\sqrt{v/c - 1}}{\sqrt{v/c + 1}} > 0$$

になるので, $x > ct$, つまり質点 D が光の世界線 $x = ct$ よりも上のときは t' は正である.

以上の結果をまとめると

$$x > vt \text{ のときは } x' > 0, t' > 0$$

$$vt > x > ct \text{ のときは } x' < 0, t' > 0$$

である.

19.2 超光速時の固有時間

前の単元で求めた

$$t' = \frac{-(t - xv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \quad (19.2)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \quad (19.3)$$

は光速度を超えた観測者 B から見た質点 D の時間と距離の式なので, 超光速で運動する質点 D の固有時間について検討する必要がある. そのためには観測者 B が質点 D に近づいて一致した場合を考える. B と D が一致した時は $x' = 0$ になる. (19.3) で $x' = 0$ にすると

$$0 = \frac{x - vt}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}}$$

から $x = vt$ である. $x = vt$ を (19.2) に代入して得られる時間 t は D の固有時間 τ になるので

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{-(t - vtv/c^2)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \\ &= \frac{t(v^2/c^2 - 1)}{\sqrt{v^2/c^2 - 1}} \\ &= t\sqrt{v^2/c^2 - 1} \end{aligned} \quad (19.4)$$

になる. (19.4) が超光速で運動する質点の固有時間である. $t > 0$ から $\tau > 0$ なので, 超光速で運動する質点 D の時間が逆転して昔に戻ることはない. 超光速粒子タキオンを使ってタイムマシンを作る話があるが, 以上の計算結果から時間を逆行することは不可能である.

また, 超光速の質点の世界点は $ct' + x'hi$ なので負の世界に入っている. そこで, 超光速の質点を正の世界からは観測できない. ただし, 正の世界の物質が超光速時に負の世界に入って存在できるかどうかは不明である.

さらに, (19.4) からわかるように, 速度 v が早くなるほど時間が早く経過する. この結果は, 光速よりも遅い速度では速度の増加とともに時間が遅くなることと反対である. つまり, 光速に近づくと時間が遅くなり, 光速を超えると時間が早くなるのである.

(19.4) は二つの仮定から計算されている. その仮定とは「13.2 新八元数の公理」で説明した以下の二つの公理である.

公理 5. 新八元数による $B\bar{A}/|A|$ は, 4 次元時空で A による B の座標変換を表す.

公理 7. 4 次元時空の世界点を表す新八元数は

$$A = ct_0h + x_0i + y_0j + z_0k + ct_1 + x_1hi + y_1hj + z_1hk$$

である. ただし, $ct_0 > 0, ct_1 > 0$

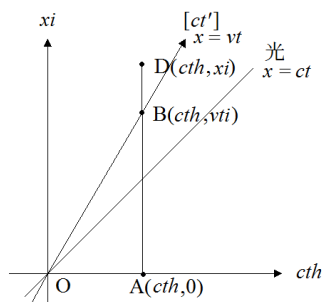


図 19.1

図 19.1 の cth 軸と直線 $x = ct$ に挟まれた時空は我々が存在する時空である. この時空で上記の二つの公理から得られる定理や結論に矛盾はない. しかし, 直線 $x = ct$ と xi 軸に挟まれた時空でもこれらの公理が成り立つかどうかは不明である. もし, 二つの公理が超光速の時空で成り立たなければ (19.4) は違った式になる可能性が残されている.

19.3 ゼノンの背理と不連続公理

以上の計算で超光速時の粒子の固有時間が存在することがわかったので, 超光速の粒子は存在可能である. しかし, 速度 v を光速 c に近づけても c になることはできないので, 粒子は光速を超えることはできないと考える人がいるだろう. その問題に答えるのがゼノン (Zenon) の背理である.

ゼノンは紀元前 4 世紀のギリシャの哲学者である. ゼノンの背理は数種類あるが, 代表的なものは「アキレスと亀」である. アキレスは足が一番速い人間であり, 亀は足が一番遅い動物の例である. わかりやすいように x 軸上で考える. アキレスは原点 O にいて亀はアキレスの少し前の x_0 の位置にいるとする. アキレスと亀が同時に走り出し, 最初に亀がいた x_0 の位置にアキレスが到達したとき, 亀は元の位置よりも先

の x_1 の位置に進んでいる。さらに、アキレスが x_1 の位置に到達したとき、亀は x_1 の位置よりも先の x_2 の位置にいる。以後もこれを繰り返すのでアキレスは亀に追いつくことはできない。しかし、現実にはアキレスは亀に追いつくことができる。理論と現実が一致しないので「背理」というのである。

この矛盾を解決するために微積分学では $\lim$ (リミット) や $\varepsilon - \delta$ (イプシロン-デルタ) 法などの極限の理論を使うが、単純な話を複雑な理論に言い換えただけで「微小量と 0 は異なるはずである」という直感に明快な回答を与えていない。

「13.1 公理と定理の必要性」で説明したように、すべての理論は公理があり公理を検討することで理論の矛盾は解決できる。そこで、ゼノンの背理の公理を考える。ゼノンの背理の公理は「時間と空間は連続量である」である。時間も空間も連続していて切れ目がないとゼノンは考えたのである。連続しているので微小量は 0 にならない。そこで、この公理を「時間と空間は離散量である」に変えるとゼノンの背理は背理ではなくなる。この公理を「不連続公理」とよぶことにする。この公理では「時間と空間は飛び飛びの値をとる」と考える。

理解しやすくするためにゼノンの背理の内容を川を渡る話に変える。川幅 l の川があるとすると、この川を渡る方法に橋の上を歩く方法と飛び石を渡る方法の二つの方法があると仮定する。

ある人が橋を歩いて対岸に行くときに、ある時間に橋の半分の $l/2$ の位置に達する。さらに歩いて残りの距離の半分の対岸から $l/4$ の位置に達する。このように対岸までの残りの距離の半分の位置に達し続けるので、残りの距離が 0 になることはない。つまり、この人は対岸に達することはできない。微積分学ではこの計算を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n l = 0$$

と書いて解決されたことにするが、「微小量と 0 は異なるはずである」という疑問に答えていない。

では飛び石を渡って対岸に行く場合はどうなるだろうか。ある時間に対岸までの残りの距離の半分の位置にある飛び石に移っているだろう。そして、最後に対岸までの最後の 1 個の飛び石に移ったと仮定する。この最後の飛び石と対岸までの半分の位置は川の中なので残りの半分の位置に飛び移ることはできない。そこで、次は対岸に飛び移る場合しか考えられない。この飛び石を使ってアキレスと亀が競争すれば、アキレスと亀の距離は 0 になり亀はアキレスに追い抜かれることがわかる。つまり、空間が不連続であればゼノンの背理は成り立たない。

極めて微小な量を扱う素粒子論や量子力学では、観測される量が不連続であることが知られている。我々の 4 次元時空の各座標軸は不連続であるが、日常生活では連続と考えたほうが計算が簡単なので連続公理を採用しているだけである。

不連続公理で考えれば、粒子の速度が光速 c に近づくと、ある点でジャンプして速度 v が光速 c になり、またジャンプして超光速になることが可能である。4 次元時

空を正確に理解するためには「時間と空間は離散量である」という公理を認めなければならない。

ここで、離散量の大きさが問題になる。「**18.1 質量は単位世界線の時間成分である**」では世界線の1単位の長さを η （エータ）として計算した。 η は素粒子の重さを表すので、その大きさは素粒子よりも小さい。そして、これよりも小さい長さは考えられないので、 η が時空の離散量の単位長さの可能性がある。

20. 今後の課題

20.1 電磁気学

19 章までは新八元数を使った計算から証明された結論を書いたが、この章では、今後解決しなければならない課題について述べる。その最初は電磁気学である。

マクスウェル (James Maxwell) の方程式は電磁気学の基本法則として有名である。マクスウェルはそれまでに知られていた電磁気学の法則を次の四つの方程式にまとめた。電場 $\mathbf{E}$ 、電束密度 $\mathbf{D}$ 、磁場 $\mathbf{H}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ 、電流密度 $\mathbf{J}$ 、電荷の体積密度 ρ (ロー) の関係は

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

である。 ∂ は偏微分を表し、 ∇ (ナブラ) は

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

である。ただし、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{H}$ 、 $\mathbf{J}$ はベクトルであり、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ は新八元数の虚数ではなく、 x 、 y 、 z 軸上の単位ベクトルである。これらの四つのマクスウェル方程式はローレンツ変換で不変であることがわかっている。

相対性理論によるローレンツ変換と新八元数による新ローレンツ変換を比べると、 t' と x' の式は同じであるが y' と z' の式は異なる。ローレンツ変換では $y' = y$ 、 $z' = z$ であるが、「10.1 新四元数による新ローレンツ変換の導出」で説明したように新ローレンツ変換では

$$y' = \frac{y + (v/c)zh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.5)$$

$$z' = \frac{z - (v/c)yh}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (10.6)$$

である。その後の章で説明したように、この新しい y' と z' は光速不変の原理や世界距離、運動量保存の法則、質量の速度依存性などのローレンツ変換から導かれた結論と同じ結論を導く。しかし、「16.5 シンクロトン放射光の傾き」で説明したように、観

測者の移動方向に垂直に放射された光については異なった結論を導いた。どちらが正しいかはまだ不明である。

電磁気学のマクスウェル方程式はローレンツ変換で不変になるが、新ローレンツ変換でも不変になるだろうか。そして、不変であるときに y' と z' 成分はどうなるだろうか。マクスウェル方程式に新ローレンツ変換を適用したらシンクロトン放射の垂直光のような新しい結論が得られるかもしれない。これが新八元数と電磁気学の第1の課題である。

第2の課題はベクトルで書かれたマクスウェルの方程式を新八元数で書き直すことである。このことは、第1の課題の解決のためにも必要である。「14 新八元数とベクトル」で説明したように、ベクトル $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ とその新八元数 A , B の関係は

$$B\bar{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (14.17)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (B\bar{A} - A\bar{B})/2 \quad (14.26')$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (B\bar{A} + A\bar{B})/2 \quad (14.27')$$

である。この式を使ってマクスウェルの方程式を書き換えると、今よりも理解しやすい式になる可能性がある。また、ベクトルを新八元数で書き換えると、どの成分が負の世界にあるかがわかるので、電磁波の一部が負の世界に入っていることも明らかになるだろう。なぜなら、新八元数では実数成分（従来の実数と hi , hj , hk 成分）は負の世界の成分である。

次に第3の課題について説明する。「8.3 光の世界距離がゼロであることの解釈と光速不変の原理」で説明したように、物質を構成する質点の世界線と光の世界線は元々同じ性質を持ち、世界距離 $s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ が0の場所を通る世界線を光とよび、それ以外の場所を通る世界線を物質とよんでいるに過ぎない。つまり、物質と光の違いは4次元時空の通過場所の違いだけである。

光は電磁波に含まれる。物質を構成する質点の世界線と光の世界線の違いは速度の違いだけであると考え、物質の世界線もマクスウェルの方程式に似た式を満たす可能性がある。それを新八元数方程式とよぶと、マクスウェルの方程式は新八元数方程式の v を c に変えた極限の方程式かもしれない。そして、新八元数方程式から導かれる力が物質が持つ力、すなわち重力や核力かもしれない。マクスウェルの方程式の一般式である新八元数方程式は存在するのだろうか。これが第3の課題である。もし新八元数方程式が存在すれば、それは全ての力を説明する統一場理論になるかもしれない。

また、物質の世界線が光と同じように波であると考え、その振幅が存在するため、その時間成分は波の関数 Ψ (プサイ) を偏微分した $\partial\psi/\partial t$ になり、量子力学の結果と一致する可能性がある。そのためには、まずマクスウェルの方程式を新八元数で書き換える必要がある。

20.2 一般相対性理論

この本では混乱を避けるために特殊相対性理論を単に相対性理論とよんできたが、この單元では特殊相対性理論と一般相対性理論を区別する。静止している観測者 A に対して観測者 B が等速度 v で直線運動をしている時の理論が特殊相対性理論である。これに対して観測者 B が加速度運動をしている時の理論が一般相対性理論である。世界線で考えれば、 B の世界線が曲がっている時の理論が一般相対性理論である。

一般相対性理論の代表的な二つの結論は

- (1) 光速 c は加速度 a に依存して変化する。
- (2) 質量が空間を曲げ、曲がった空間が重力を生む。

である。それぞれについて新八元数から考えられる課題を説明する。

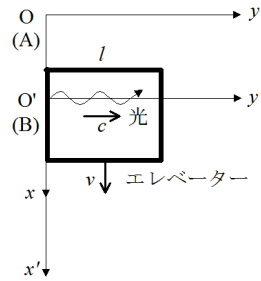


図 20.1

まず、「光速 c は加速度 a に依存して変化する」を検討する。一般相対性理論の説明で必ず出て来るのが「自由落下しているエレベーターの中の光」である。図 20.1 のように紐が切れて自由落下しているエレベーターがあると仮定する。落下方向を x 軸の正方向にして水平方向を y 軸にする。静止している観測者 A の座標が x - y 座標であり、エレベーターに乗っている観測者 B の座標を x' - y' 座標とする。 A, B はそれぞれ原点 O, O' にいるとする。また、ある瞬間のエレベーターの速度を v とし、そのときに B が y' 軸方向に光を放射したと仮定する。また、 B から見たエレベーターの幅は l_B である。

まず、相対性理論のローレンツ変換で計算する。静止している観測者 A から見た光の速度の x, y, z 軸成分を V_x, V_y, V_z とすると、「16.2 ローレンツ変換による証明」で説明したように

$$V_x = v \quad (16.1)$$

$$V_y = c\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (16.2)$$

$$V_z = 0 \quad (16.3)$$

である。ローレンツ変換では y 軸方向の長さは変化しないので、 B から見たエレベーターの幅 l_B は A から見ても l_B である。よって、光がエレベーターの反対側の壁に到

達する時間は静止した観測者 A の場合を t_A と書くと

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{l_B}{V_y} \\ &= \frac{l_B}{c\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (20.1)$$

になる。これに対して、 B の場合を t_B と書くと $V'_y = c$ なので

$$t_B = \frac{l_B}{c} \quad (20.2)$$

である。

実際には加速度があるので v は変化しているのであるが、ある一瞬で考えても (16.2) と (20.1), (20.2) からわかるように、落下しているエレベーターの中で水平に放射された光の速度は静止している観測者 A から遅く観測され、反対側の壁に到達する時間も A の方が長い。落下速度 v に加速度 a が作用するときは v が増加していくので (16.1) と (16.2) からわかるように V_x が増加し V_y は減少し、図 20.2 のように A からは光が下向きの放物線を描いているように見える。

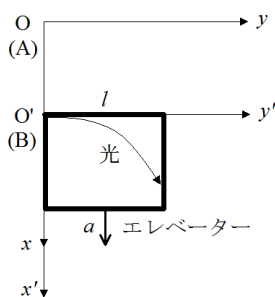


図 20.2

ところが、新ローレンツ変換で計算すると、エレベーターの中で y' 軸方向に放射された光の速度は静止している観測者 A から見ても y 軸成分は c である。「**16.3 新ローレンツ変換による証明**」で証明したように、新ローレンツ変換では

$$V_x = v \quad (16.4)$$

$$V_y = c \quad (16.7)$$

$$V_z = v h \quad (16.8)$$

である。このときに、反対側の壁に到達する時間 t_A , t_B はどうなるだろうか。

ローレンツ変換と異なり、新ローレンツ変換では y 軸方向の長さが速度 v で変化するので、 B から見たエレベーターの幅 l_B と A から見た幅 l_A の関係式を求める。新ローレンツ変換の

$$y' = \frac{y + v_x z h / c}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \quad (10.5)$$

で A が B に対して $-v$ の速度で運動していると考え、 $z = 0$, $y = l_B$, $y' = l_A$, $v_x = -v$ とすると

$$l_A = \frac{l_B}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

になる。よって (16.7) から

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{l_A}{V_y} \\ &= \frac{l_B}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (20.3)$$

になる。また,

$$t_B = \frac{l_B}{c} \quad (20.4)$$

である。

(20.3) と (20.4) は (20.1), (20.2) と同じであるので、 A から見た光の軌跡は図 20.2 と同じになる。しかし、(20.1) と (20.2) は y 軸方向の光の速度が $c\sqrt{1 - v^2/c^2}$ であり、(20.3) と (20.4) は y 軸方向の光の速度が c である点が異なっている。 y 軸方向の速度が違っているのに到達時間が同じになる理由は、新ローレンツ変換では y' が y と同じにならないからである。

以上の証明から、新ローレンツ変換では加速度があっても y 軸方向の光速は c であり、そのことから矛盾が生じないことがわかる。加速度 a がある時の一般相対性理論の光速の式は位置を x とすると

$$c' = (1 + \frac{ax}{c^2})c \quad (20.5)$$

である。新八元数を使うと、(20.5) はどう変わるだろうか。これが一般相対性理論についての第 1 の課題である。

次に「質量が空間を曲げ、曲がった空間が重力を生む」について検討する。アインシュタインの重力理論はブラックホールの存在を説明できる素晴らしい理論であるが、独立した物理量として質量が存在し、その質量が空間を曲げるという理論には疑問がある。なぜなら、「6.1 固有時間と時間の遅れ」で説明したように、加速度が存在しない特殊相対性理論を新八元数で書き換えると、質量が存在しないのに時間と空間の関係にはすでに曲がりがあるからである。また、「18. 新八元数と質量」で説明したように、「4 次元時空の運動量の時間成分を c 倍したものがエネルギーである」ことと、特殊相対性理論のエネルギーと質量の関係式 $E = mc^2$ は、公理「単位世界線の時間成分が質量である」を使って矛盾なく証明できる。

アインシュタインはニュートンの「絶対空間」と「絶対時間」の概念を否定し時間も距離も相対的なものであることを発見したが、「絶対質量」の概念は捨てていない。この本の「単位世界線の時間成分が質量である」という理論は絶対質量を否定し質量の

単位は距離であることを示している。では、新八元数で考えると重力とは何だろうか。これがこの単元の第2の課題である。

第3の課題は加速度系でのローレンツ変換はどうなるかということである。どの一般相対性理論の本にも、特殊相対性理論のローレンツ変換に相当する加速度系での式が書かれていない。その理由は、アインシュタインの相対性理論では光速不変の原理を使ってローレンツ変換を求めたため、速度の方向が任意であるときのローレンツ変換の一般式も加速度がある場合の式も作れないことである。それに対して、この本では新八元数による座標変換で新ローレンツ変換を求めたので、加速度系での新ローレンツ変換を求めることができる可能性がある。以下に途中の計算を示す。

ct - xi 平面で、静止している観測者 A に対して固有加速度 a_0 で運動している観測者 B の A から見た加速度を a とすると、 a_0 と a の関係は「17.7 加速度と4元加速度」で説明したように

$$a_0 = \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \quad (17.69)$$

である。 v は A から見た B の速度であり、 $a = dv/dt$ なので

$$a_0 = \frac{dv/dt}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$$

である。 dt を移項して不定積分を計算すると

$$\begin{aligned} \int a_0 dt &= \int \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \\ a_0 t &= \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + C \end{aligned}$$

になる。 C は積分定数である。初速度が0、つまり $t = 0$ のときに $v = 0$ とすると $C = 0$ なので

$$a_0 t = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (20.6)$$

である。

(20.6) を v の式にするために変形すると

$$\begin{aligned} a_0 t \sqrt{1 - v^2/c^2} &= v \\ a_0^2 t^2 (1 - v^2/c^2) &= v^2 \\ a_0^2 t^2 &= v^2 + a_0^2 t^2 v^2/c^2 \\ a_0^2 t^2 &= v^2 (1 + a_0^2 t^2/c^2) \\ v &= \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + a_0^2 t^2/c^2}} \end{aligned}$$

である。ただし、 $v > 0$ 、 $t > 0$ とする。 $v = dx/dt$ なので、この式は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a_0 t}{\sqrt{1 + a_0^2 t^2/c^2}}$$

と書くことができる. dt を移項して不定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\int dx &= \int \frac{a_0 t dt}{\sqrt{1 + a_0^2 t^2 / c^2}} \\ x &= \frac{c^2}{a_0} \sqrt{1 + (a_0 t / c)^2} + C'\end{aligned}\tag{20.7}$$

になる. C' は積分定数である. $t = 0$ のときに $x = 0$ とすると (20.7) から

$$\begin{aligned}0 &= \frac{c^2}{a_0} + C' \\ C' &= -\frac{c^2}{a_0}\end{aligned}$$

になる. これを (20.7) に代入して

$$x = \frac{c^2}{a_0} \left[\sqrt{1 + (a_0 t / c)^2} - 1 \right]$$

である.

式を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{a_0 x}{c^2} + 1 &= \sqrt{1 + (a_0 t / c)^2} \\ \left(\frac{a_0 x}{c^2} + 1 \right)^2 &= 1 + \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2 \\ \left(\frac{a_0 x}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{a_0 t}{c} \right)^2 &= 1\end{aligned}\tag{20.8}$$

になる. (20.8) が固有加速度 a_0 で運動する観測者 B の世界線の方程式であり $ct'h$ 軸になる.

$x = ct$ に対して (20.8) と線対称な曲線を $x'i$ 軸とすると, その方程式は「**4.3 斜交座標軸の式を求める簡単な方法**」で説明した方法で計算できる. (20.8) で $x \rightarrow ct$, $ct \rightarrow x$, つまり $t \rightarrow x/c$ に置き換えた式が $x'i$ 軸の方程式である. 実際に計算すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_0 ct}{c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{a_0 x}{c^2} \right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{a_0 t}{c} + 1 \right)^2 - \left(\frac{a_0 x}{c^2} \right)^2 &= 1\end{aligned}\tag{20.9}$$

になる. (20.9) が $x'i$ 軸の方程式である. (20.8) と (20.9) は双曲線である.

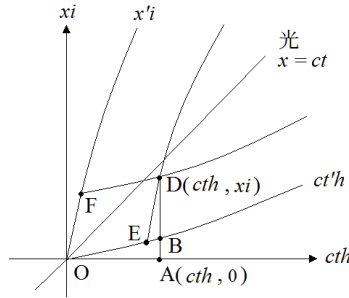


図 20.3

A から見た質点 D の座標を (cth, xi) , B から見た座標を $(ct'h, x'i)$ とすると, 新複素平面図は図 20.3 のようになる. 原点 O を曲線 $x'i$ 軸上を滑らせながら曲線 OB を平行移動させ, 曲線が点 D を通った時の O の位置を F とする. 同様に原点 O を曲線 $ct'h$ 軸上を滑らせながら曲線 OF を平行移動し, 曲線が点 D を通った時の O の位置を E とする. このとき

$$ct'h + x'i = |OE|h + |OF|i$$

である. ただし, $|OE|$ と $|OF|$ は曲線 OE と曲線 OF の長さである. この式と (20.8), (20.9) を使えば, 新八元数で計算した加速度がある場合の座標変換の式が求められると考えられる. 計算は積分を使わなければならない. また, 「13.3 新八元数の定理」で証明した

定理 26. 2次元時空の微分世界距離 dl は $dl = chdt\sqrt{1 - (dx)^2/(cdt)^2}$ であるを使わなければならない. また, 双曲線関数 $(e^x - e^{-x})/2$ や $(e^x + e^{-x})/2$ を使わなければならないだろうが, その前に指数関数 e が $cth-xi$ 平面で成り立つことを証明しなければならない.

図 20.3 からわかるように, 加速度系の B が使う座標軸の $ct'h$ 軸と $x'i$ 軸は曲がっている. B は時空は曲がっていると観測するだろう. このように質量が無くても加速度系の観測者にとって時空は曲がっている. ここで大切なことは, B が観測する時空の曲がりとは相対的なものであるということである. 絶対的な時空の曲がりとは, 「13.3 新八元数の定理」の「定理 10」と「定理 15」で説明したように新八元数が本質的に持つ $cth-xi$ 平面と $yj-zhk$ 平面の曲がりだけである.

以上で説明した加速度系での新ローレンツ変換を求めることが第 3 の課題である.

20.3 世界線の反射と力

高校で力学を学ぶときに最初に教えられる式の一つがニュートンの運動方程式

$$F = ma \quad (20.10)$$

である。この式で F , m , a はそれぞれ力, 質量, 加速度である。そして, この式の意味は「力 F が質量 m の物体に加えられると加速度 a が生じる」と教えられる。しかし, この解釈は本当に正しいのだろうか。(20.10) は F と ma が等号で結ばれているので, 力が加えられると経過時間 0 で加速度が生まれることになる。相対性理論によれば, 経過時間 0 で伝わる信号は存在しない。別の言い方では無限大の速度で伝わる信号は存在しない。そこで, 「力 F が質量 m の物体に加えられると加速度 a が生じる」という解釈から矛盾が生じる。

(20.10) は次のように書き換えたほうがよいと考えられる。すなわち

$$ma = F \quad (20.11)$$

である。そして, この式の意味は「質量 m の物体の加速度が a である状態を力 F とよぶ」である。この解釈では, 加速度を生み出す力 F は存在せず, ma の状態を力 F と言い換えているだけである。力は運動の状態を表す言葉でしかない。この考えによれば, (20.11) で ma と F が等号で結ばれていても矛盾は生じない。

4 次元時空には力が存在しないことを説明するために, 力が加えられずに速度が変化する例を示す。光が鏡に垂直に当たり垂直に反射する場合を考える。光の入射方向を正の向きにすると, 反射前の光速は c であり反射後の光速は $-c$ である。つまり, 反射の前後で光速は c から $-c$ に変わっている。そこで, c から $-c$ に変わる微小時間の出来事を考えてみる。 c から $-c$ に変わるのだから, 鏡に当たって跳ね返るまでに光は減速し, あるときに速度 0 になり, 次第に速度が増して光速 c になったと考えてしまう。しかし, この話には矛盾がある。なぜなら, 光速の絶対値は常に c であるという光速不変の原理から, 光が減速することはできないからである。光速不変の原理に従って, 光速は減速することも速度 0 になることもなく経過時間 0 で c から $-c$ に変わったのである。経過時間 0 で作用する信号は存在しないので, 光の反射のときの速度の変化に力は作用していない。我々は経験的に速度は連続して変化すると考えているが, 「19.3 ゼノンの背理と不連続公理」で説明したように時間と距離は不連続なので, 時間と距離から計算される速度も不連続である。よって, 光速が瞬間的に c から $-c$ に変わることは可能である。

鏡を構成する原子が光を吸収し同じ波長の光を放射したと考えることもできるが, そのためには時間を必要とするので原子を構成する世界線と光の世界線の反射と考えるほうが普遍性がある。

上の例は光だけの特殊な現象であると考えの人がいるかもしれないが, この本では, 「光と物質の世界線の違いは 4 次元時空の通過場所の違いだけである」を公理にして

いるので、物質の衝突でも同じように考えることができる。大きさと質量が同じ鋼球の衝突を考える。二つの鋼球が反対方向からそれぞれ v と $-v$ の速度で衝突した場合、対称性から衝突後の二つの鋼球の速度は $-v$ と v になる。ただし、衝突はエネルギー損失がない完全弾性衝突とする。衝突の微小時間に鋼体の重心の速度が v から $-v$ に経過時間 0 で変わったと考えれば、衝突時に働く力を考える必要がない。衝突のときに働く力を作用反作用という人がいても、その力が何であるかを説明できる人はいない。

以上の推論から、この本では「力は存在せず、世界線が反射して曲がった状態を力とよぶ」を「公理 11」にする。衝突後に世界線が曲がり続ければ力が作用し続けているということができる。実際に、4 次元時空図では加速度があれば世界線は曲がり続ける。また、世界線が直線の状態を力が作用していないということができる。

このように、世界線が反射することを力とよぶと、世界線の反射の法則をみつけることが重要になる。光が鏡に当たって反射するとき、入射角と反射角は同じであるという反射の法則がある。同じように物質の世界線の反射の法則を探した結果、以下の結論に達した。すなわち、エネルギー保存の法則

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18.16)$$

と、運動量保存の法則

$$\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{M_0 V_0}{\sqrt{1 - V_0^2/c^2}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{M_0 V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (18.23)$$

が世界線の反射の法則である。ただし、 m_0 と M_0 は物質 A と B の静止質量である。そして、衝突前の A と B の速度は v_0 と V_0 であり、衝突後の速度は v と V とする。また、(18.23) は速度が x 軸方向のときの運動量保存の式である。

衝突後の速度 v と V は衝突前の速度 v_0 と V_0 から、一つに決まらなければならない。そのためには v_0 , V_0 , v , V を含む連立方程式がなければならない。(18.16) と (18.23) は v_0 と V_0 から v と V を求めるための連立方程式になっている。また、世界線の反射の法則はどの座標から見ても同じでなければならないが、(18.16) と (18.23) が座標変換で不変であることは「18.6 エネルギー保存則の座標変換不変性」と「17.6 運動量保存の法則」で証明した。つまり、(18.16) と (18.23) は世界線の反射の法則が満たすべき二つの条件を備えているので、エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は世界線の反射の法則であると考えられる。

エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は物理学の根本的法則であり多くの物理学的問題を解くために使われているが、なぜこの二つの法則が存在するのかは不明であった。しかし、上の証明からわかるように、エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は世界線の反射の法則であるにすぎない。また、エネルギー保存の法則と運動量保存の法則からさまざまな物理法則が証明できるということは、世界線の反射から多くの物理現象が説明できる可能性を示している。

質量は単位世界線の時間成分であり、エネルギーも時間成分である。また、運動量は単位世界線の空間成分であり、世界線の反射による世界線の曲がり方を力とよぶ。さらに、エネルギー保存の法則と運動量保存の法則は世界線の反射の法則であるということがこの本の結論である。すなわち、4次元時空には新八元数と世界線しか存在せず、全ての物理現象は世界線の反射で説明できる可能性がある。より正確に言えば、4次元時空の2重構造や時間と空間の関係および世界線そのものが新八元数から導かれるので、この宇宙には新八元数しか存在しないということができる。

世界線の反射による世界線の曲がり方が力であるならば、重力とは何だろうか。地上に落下するリンゴの世界線は4次元時空図に描けば曲線になる。世界線が曲線であるためには他の物質の世界線が衝突し続けなければならない。しかし、落下するリンゴを観察しても何かが衝突し続けているようには見えない。リンゴの世界線に衝突しているものは何だろうか。素粒子物理学で重力を伝える粒子と考えられているグラビトンはその候補になるのだろうか。この疑問の答えを見つけなければ、「世界線の反射による世界線の曲がり方が力である」という公理は間違っていることになる。

アインシュタインは「質量が空間を曲げ、その曲がり方が重力として観測される」と説明している。しかし、新八元数と世界線から導かれる理論では、質量は単位世界線の時間成分であり空間を曲げることはない。どちらの理論が正しいかを考えるためには、まず電磁気学のマクスウェルの方程式を新八元数で書き換え磁力とは何かを明らかにする必要がある。なぜなら、磁力は重力と同じ遠隔力であり逆2乗の法則に従うからである。

20.4 5次元時空とひも理論

現代物理学の最先端の理論に「ひも理論」がある。この單元では、ひも理論と新八元数時空理論の関係を考える。

ひも理論については、矢沢潔氏と新海裕美子氏、ハインツ・ホライス氏の「次元とはなにか」に簡潔明瞭に書かれている。ひも理論の前段階は「カルツァ＝クライン理論」である。1920年頃の物理学者の関心は、電磁気学のマクスウェル方程式と重力の一般性相対性理論の統一であった。これを「統一場理論」という。1919年にテオドル・カルツァ(Theodor Kaluza)は重力についてのアインシュタインの4次元の方程式を5次元の式に書き換えた。すると、この式は一般相対性理論と電磁気学の方程式の両方を含んでいたのである。また、オスカル・クライン(Oskar Klein)はこの第5の次元の物理的意味を考え、第5の次元は極めて小さい丸まった輪の形をしていると唱えたのである。これによって電磁場と重力場の統一が成し遂げられたかにみえた。しかし、「余剰次元」とよばれる第5の次元は素粒子よりも小さいので観測することができないという欠点があり、カルツァ＝クライン理論 1940年頃には忘れ去られてしまった。

物質を構成する最小の粒子である素粒子を研究する素粒子物理学には「標準理論」がある。これは素粒子の性質を説明する理論であるが、複雑な理論である。これに対

して、1970年に南部陽一郎先生などによって「素粒子は大きさをもつ1次元のひもの振動である」と考えると、原子核の中の素粒子の相互作用は数学的に証明できる」ことが明らかになった。こうして、ひも理論が生まれたのである。最初のひも理論は26次元時空を必要としたが、ピエール・ラモンの「全ての素粒子には対になる素粒子が存在する」という「超対称性理論」により、現在では10次元時空でのみ、ひも理論が成立することがわかっている。そして、4次元以外の余剰次元は小さく丸まって存在すると考えられている。つまり、カルツァ＝クライン理論が復活したのである。

次に、新八元数時空理論とひも理論が同じ内容を持つ可能性を示す。新八元数による計算結果は、全ての素粒子は4次元時空の位置を表す変数 (ct, x, y, z) と世界線の振幅を表す変数 Ψ の合計五つの変数を持つことを示している。そして、「**18.1 質量は単位世界線の時間成分である**」で説明したように、 Ψ は世界線の太さなので、その大きさは素粒子よりも小さい。ひも理論の前段階のカルツァ＝クライン理論では、第5の次元は素粒子よりも小さい輪の形をしているので観測できない。また、第5の次元についてブライアン・グリーン (Brian Greene) は「ガーデンホース理論」を唱え、「第5の次元は庭の水撒きホースの断面の円周である」と説明している。これは、新八元数時空理論の「素粒子の世界線は Ψ の太さを持つ」という仮定と一致している。そこで、カルツァ＝クライン理論の第5の次元は世界線の振幅 Ψ と同じである可能性がある。

全ての素粒子が五つの変数 (ct, x, y, z, Ψ) を持つので、物理学者や数学者は5次元時空を考えるかもしれないが、 Ψ は4次元時空の中の振幅なので4次元時空しか存在しない。このことは、加減乗除が可能な数の体系は1次元の実数、2次元の複素数、4次元の四元数、八元数しか存在しないという代数学の定理から明らかである。5次元時空は代数学的には存在できない。

また、新八元数時空理論では4次元時空は正と負の世界が重なった2重構造を持つので、正の世界の物質が持つ五つの変数 (ct, x, y, z, Ψ) と負の世界の物質が持つ五つの変数 (ct', x', y', z', Ψ') を合わせて10種類の変数が存在する。超対称性ひも理論は10次元時空でしか成り立たないが、新八元数時空理論で物質が持つ10種類の変数を10次元時空と考えている可能性がある。変数が10種類あっても、新八元数による計算では2重構造を持つ4次元時空しか存在しない。

また、全ての素粒子は対になる素粒子をもつという超対称性理論も、2重構造を持つ4次元時空理論で説明できるかもしれない。さらに、ひも理論ではすべての物質は振動する極めて短いひもで表されるが、新八元数時空理論では物質の世界線は光と同じように振動し、「**19.3 ゼノンの背理と不連続公理**」で証明したように時空の不連続性から世界線の1単位の長さ η (エータ) は素粒子よりも小さい。

このように新八元数時空理論とひも理論が同じ内容を持っている可能性があるので、ひも理論を新八元数で書き換えることができるかどうかが問題である。カルツァ＝クライン理論はテンソルで書かれている。しかし、「**15.2 テンソルの限界と新八元数による解決**」で説明したように、テンソルは4次元時空のできごとを4次元時空の断面

に押し込めて計算する数学である。そこで、ひも理論をテンソルで計算すると、4次元時空を多数の断面に分けて考えてしまうことになる。それに対して新八元数は4次元時空の出来事を4次元時空全体で計算できる数学である。そこで、正しい結論を得るために、ひも理論は新八元数で計算されなければならないだろう。

あとがき

子供たちが「なぜ $1 + 1 = 2$ なのか」と質問してきたときに、私は「 $1 + 1 = 2$ 以外の計算式、例えば $1 + 1 = 3$ ではすぐに矛盾にぶつかり、理論を作れなくなる。そこで $1 + 1 = 2$ なのだ」と答えることにしている。

複素数の座標変換を使って相対性理論のローレンツ変換を求めようとして、複素数 $a + bi$ から新複素数 $ah + bi$ を作ったが、最初は新しい虚数 h に違和感を持った。しかし、虚数 h が数学的に存在できないなら、いつか矛盾に行き当たるだろうと考え理論を進めてきた。その結果、この本で今まで証明してきたように、シンクロトロン放射光が2方向に広がるという理解できない結果になったこと以外では矛盾に出会わなかった。逆に、今まで疑問に思っていたベクトルの外積の向きや回転ベクトルの向きを数学的に証明し、ベクトルの内積と外積を同時に計算することができた。新八元数を相対性理論に適用すればするほど、新八元数は正しい数学ではないかと思うようになった。そして、自分では自分の間違いを見つけることができないので、本にして他人の批判を受けようと決めたのである。また、新八元数が正しいなら多くの人に使ってもらいたいと考えたのである。

松田卓也先生は「相対論の正しい間違え方」の中で、「相対性理論は間違っている」と主張する人々は、物理学者が間違いを認めないのは失業するのが怖いからだと言う。しかし、物理学者は新理論が論理的に間違っているから否定しているだけである。正しい新理論が見つければ、物理学者は仕事が増えて嬉しいのだ」という内容の文章を書いている。この本を書いている時点では新八元数の間違いが見つからない。もしも誰かが理論の根本的間違いを見つけたら、この本は「今までで一番数式が多いトンデモ本」になるだろう。それも1つの名誉である。しかし、多くの人々の検証で新八元数が正しいと認められたら、数学者や物理学者は忙しくなるだろう。そして、研究テーマを決めかねている若い研究者には魅力ある研究分野になるだろう。

宇宙論には様々な理論があり、どれが正しいのかわからない状態である。この混沌の原因は使っている数学がユークリッド時空の数学であることかもしれない。「はじめに」の「**新数学について**」に書いたように、電子顕微鏡でしか見ることができないウイルスを光学顕微鏡を使って研究するのに似ている。ユークリッド時空の数学で曲がった時空を研究しているのでさまざまな結論が得られているのではないだろうか。一般相対性理論の研究に使われているテンソルも「**15.2 テンソルの限界と新八元数による解決**」で説明したように、4次元時空の出来事を4次元時空内の断面に押し込める数学である。それに対して、新八元数は数自体が曲りを含んでいるので普通の計算結果が曲がった4次元時空の出来事を表す。また、新八元数を使えば4次元時空の出来事を4次元時空全体で計算できる。さらに、新八元数自体が4次元時空の2重構造を含んでいるので物理学の超対称性理論も普通に計算できる可能性がある。

数学は物理学よりも 100 年進んでいると言われている。しかし、「**11.8 4 次元時空の 4 種類の実数と 4 種類の虚数**」で説明したように、新八元数の結論は、この宇宙を構成する数には 4 種類の実数と 4 種類の虚数があることを示している。数学で使われる数は大部分が実数であり、複素関数論でも実数と虚数 i の合計 2 種類の数しか使っていない。数学は 4 次元時空がなければ存在できないと考えられるので、数学も 4 種類の実数と 4 種類の虚数を使って初めて、正確な理論を作ることができるはずである。物理学は 16 世紀に天動説から地動説への変更というコペルニクスの転回を行ったのであるが、数学ではこのコペルニクスの転回がいまだに行われていない。もし新八元数が正しければ、新八元数は数学における地動説である。我々は天動説、つまり実数を使って時空を調べているので説明できないことが残ってしまう可能性がある。地動説、つまり新八元数を使えば複雑な宇宙論を簡潔に説明できるかもしれない。

真理を知りたいという欲求は学問の原動力である。アップルコンピュータの創始者の一人であるスティーブ・ジョブズ (Steven P. Jobs) は、ある本から「食欲であれ、そして、馬鹿であれ」(Stay hungry, stay foolish.) という言葉を引用している。その意味は「常により良いものを求め、既成概念にとらわれるな」である。宇宙の真理を知るためには、常に新しい理論を探し、それが正しいと認めたときには既成概念を捨てて受け入れることが必要である。この本を最後まで読んだ人達は、真理の探究者のはずである。その人達が新八元数を物理学や数学に適用して、未だに知られていない宇宙の真理を明らかにするだろう。

参考書

- 安達忠次: 「ベクトルとテンソル」, 培風館 (1957)
- 石原 繁: 「テンソル」, 裳華房 (1991)
- 小林昭七: 「ユークリッド幾何から現代幾何へ」, 日本評論社 (1990)
- 砂川重信: 「相対性理論の考え方」, 岩波書店 (1993)
- 恒岡美和: 「明解 相対性理論入門」, 聖文新社 (2003)
- 戸田盛和: 「相対性理論 30 講」, 朝倉書店 (1997)
- 中村 純: 「物理とテンソル」, 共立出版 (2010)
- 松田卓也, 木下篤哉: 「相対論の正しい間違え方」, 丸善株式会社 (2001)
- 松田卓也, 二間瀬敏史: 「なっとくする相対性理論」, 講談社 (1996)
- 矢沢潔, 新海裕美子, ハインツ・ホライス: 「次元とはなにか」, ソフトバンク クリエイティブ株式会社 (2011)
- J.H. コンウェイ, D.A. スミス: 「四元数と八元数」, 山田修司 (訳), 培風館 (2006)
- J.B.Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, 1999

索引

あ行

アインシュタイン 76, 241, 275
 $E = mc^2$ 248, 262
一般相対性理論 273
運動質量 214, 244
運動量 245
運動量の座標変換 211
運動量保存の法則 226
エネルギー 245
エネルギー運動量関係式 261
エネルギー保存の法則 253
エレベーターの自由落下 76, 273

か行

回転移動 134, 139
回転ベクトル 170
ガーデンホース理論 282
カルツァークライン理論 281
逆変換 24, 91
虚数 h 31, 50, 89
虚数の世界 101, 113
距離の短縮 53, 55
空間の等方性 82
空間の曲がり 140
グレイブズ 15, 97
クロネッカーの δ 190
係数比較 133
計量テンソル 191
結合法則 131
ケイリー数 97
光速不変の原理 27, 67
5次元時空 281
固有時 51
固有質量 214

固有長さ 53

さ行

最小2乗の法則 63
座標変換 21, 28, 209
座標軸回転 37
三平方の定理 144
時間の遅れ 51
時空の2重構造 97
実数の世界 101, 113
質量 241
斜交座標 38, 111, 159
重力 276, 281
瞬間静止系 234
シンクロトロン放射光 195
新八元数 98
新八元数の公理 124
新八元数の定理 127
新複素数 32
新四元数 32
新ローレンツ変換 79, 92, 118
スカラー 155
スカラー3重積 163
スカラー4重積 166
静止質量 214
正の世界 100
世界距離 59
世界線 29
世界線の消滅 258
世界線の反射 279
世界線の曲がり 76
世界点 29
絶対空間 241
絶対時間 241

絶対質量 67, 241
絶対値 132
ゼノンの背理 268
双曲線関数 278
速度の加法法則 84, 87
速度の座標変換 211

た行

タイムマシン 267
タキオン 267
単位世界線 241
超光速 265
超対称性理論 282
直角座標 145
直線の直交 141
電磁気学 271
テンソル 175
特殊相対性理論 66

な行

南部陽一郎 282
ニュートンの運動方程式 279

は行

八元数 97
ハミルトン 15, 31, 60, 97
光の世界距離 65
光の球面の方程式 27
光の質量 250
ピエール・ラモン 282
微小距離 150
ヒッグス粒子 250
ビッグバン 247
ひも理論 281
複素数 15
双子のパラドックス 69
負の世界 101

ブライアン・グリーン 282
プランク定数 243, 251
不連続公理 268
平行移動 138
ベクトル 155
ベクトル 3 重積 163
ベクトル 4 重積 166

ま行

マクスウェルの方程式 271
ミンコフスキー時空 21
メトリックテンソル 191

や行

ユークリッド 15, 123
4 次元距離 59
4 次元線 29
4 元運動量 218
四元数 15, 31
4 元加速度 234
4 元速度 218
4 元速度の欠点 222
4 元力 239
4 次元時空の 2 重構造 100
4 種類の実数 107

ら行

リーマン幾何学 123
ローレンツ変換 27, 29, 41
量子力学 67

著者紹介

後藤 博茂

gotoclinic@able.ocn.ne.jp

1977 年 東京大学農学部卒業

1985 年 九州大学医学部卒業

1997 年 九州大学医学部分子生命科学系大学院博士課程修了

2000 年 ハーバード大学医学部博士研究員

2004 年 ごとうクリニック開業

時間と空間の原理

新八元数と相対性理論

定価: 本体 2800 円 (税別)

2012 年 6 月 26 日 第 1 刷発行

著 者 後藤博茂

発行所 KIYOTAKI

〒 801-0833 北九州市門司区清滝 1-5-2-1301

kiyotaki@gotoclinic.org

印刷所 門司印刷株式会社

© 後藤博茂 2012 年

アマゾン Amazon.co.jp で販売しています

本文と数式の作成に LaTeX 変換ソフト InftyEditor を
使用した

図の作成には EPS-draw を使用した

ISBN 978-4-9906664-1-5

C3042
